Mathematik und Wirklichkeit

Von den Wurzeln der Mathematik zu einer Didaktik des Sachrechnens

Wissenschaftliche Hausarbeit, als Bestandteil der Prüfung zum ersten Staatsexamen an der Pädagogischen Hochschule Weingarten

Vorgelegt am 13.8.1998
von Jörg Dieter, 6. Semester

Korrektoren:
Prof. Dr. rer. nat. Bernd Hafenbrak
Prof. Dr. habil. Siegfried Zellmer

Jörg Dieter, 1998

E-Mail: jolifanto@web.de

Die Arbeit ist abrufbar unter: www.jolifanto.de

Inhalt

„Tatsächlich beruht, ob man das nun wahrhaben will oder nicht, alle mathematische Pädagogik ... auf einer Philosophie der Mathematik.“ [1]

Rene Thoms

Einleitung

„Mathematik und Wirklichkeit. Von den Wurzeln der Mathematik zu einer Didaktik des Sachrechnens.“ - Der Titel dieser Arbeit gibt ein Thema vor, das einen weiten Bogen spannt; einen Bogen, den man im Blick behalten muß, will man sich nicht in den interessanten und reizvollen Einzelheiten verlieren, die sich entlang des Weges finden. Dieses Thema spannt aber nicht nur einen weiten Bogen, es läßt sich auch von vielen Seiten aus betrachten. Ein Mathematiker wird anders an das Thema herangehen als ein Naturwissenschaftler, ein Philosoph anders als ein Historiker. Mein eigener Zugang, als Student einer Pädagogischen Hochschule und zukünftiger Realschullehrer, wird nochmals ein anderer sein.

Die angewandte Mathematik übersetzt Probleme der wirklichen Welt in mathematische Probleme, löst die mathematischen Probleme und überträgt schließlich die Lösungen wieder auf die Wirklichkeit.[2] Das Sachrechnen bezeichnet die Umsetzung angewandter Mathematik in der Schule. Je nach didaktischer Konzeption bezieht es sich dabei nur auf einen relativ eng umgrenzten Bereich angewandter Mathematik oder auf die angewandte Mathematik ganz allgemein.[3] Es spielt seit jeher eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht.

Stärker als ein Mathematikunterricht, der sich mit Bereichen der reinen Mathematik befaßt, steht der Sachrechenunterricht in ständiger Wechselwirkung mit den gesellschaftlichen Gegebenheiten und muß sich mit der Gesellschaft ändern und weiterentwickeln. Das macht ihn besonders reizvoll und zu einer immer neuen Herausforderung für Mathematikdidaktiker und -lehrer. Das große Echo und die Diskussion, die die Veröffentlichung der TIMSS-Studie im letzten Jahr auslöste - eine breit angelegte empirischen Studie, die den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in verschiedenen Ländern vergleicht - belegte dies eindrucksvoll. Deswegen habe ich mich entschieden, meine wissenschaftliche Hausarbeit dieser Thematik zu widmen.

Meine Verantwortung als zukünftiger Lehrer sehe ich darin, meinen Unterricht so zu gestalten, daß dadurch für die Schüler der größtmögliche Nutzen entsteht. Dadurch bin ich mit einer ganzen Reihe von Fragen konfrontiert:

---

[1] Thoms, Rene. In: Howson, A.G. (Hg.): Developments in Mathematical Education. Cambridge 1973. S. 204. Z.n. Otte 1974: S. 5

[2] vgl. z.B. Winter 1994: S. 31f

[3] vgl. Glatfeld 1983 S. 40ff und den Abschnitt „3.1.3 Das ‘traditionelle’ Sachrechnen“ meiner Arbeit.

Was ist wichtig für meine Schüler?

- Wie können die Inhalte des Faches Mathematik den Schülern helfen?
- Welches ist die günstige Weise, den Schülern diese Inhalte zu vermitteln?

Im Unterricht sind Objekt, Subjekt und Tat - der Unterrichtsgegenstand, die Schüler, die unterrichtet werden und die Tätigkeit des Unterrichtens selbst - eng miteinander verknüpft. Um die Fragen, die sich mir stellen, sinnvoll diskutieren zu können, sind deswegen verschiedene Informationen notwendig.

- Ich muß etwas über die Sache wissen, die ich unterrichte.
- Ich muß etwas über die Schüler und die Welt wissen, in der sie leben.
- Ich muß etwas darüber wissen, wie Mathematikunterricht normalerweise abläuft und in welchen Kontext er eingebettet ist.

Wenn ich Informationen zu diesen drei Bereichen habe, kann ich mir überlegen, was am Unterrichtsgegenstand für die Schüler vor dem Hintergrund des Unterrichtskontextes und der Welt, in der sie leben, bedeutsam ist. Ich kann also die Ziele festlegen, die ich mit meinem Unterricht verfolgen will. Schließlich muß ich mir überlegen, wie ich meinen Unterricht am besten gestalte, um diese Ziele erreichen zu können.[4]

Daraus ergibt sich die Struktur meiner Arbeit. Im ersten Kapitel will ich mich zunächst der Frage zuwenden, was Mathematik eigentlich ist. Schaut man sich an, was Mathematiker und Wissenschaftstheoretiker zu dieser Frage zu sagen haben, so stellt man fest, daß ihre Ansichten zum Teil diametral entgegengesetzt sind. Manche sehen in der Mathematik eine Kunst, die höchste Blüte des menschlichen Geistes und wollen sie allein um des ästhetischen Genusses wegen betrieben sehen. Andere gestehen ihr nur deswegen eine Daseinsberechtigung zu, weil sie auf die Wirklichkeit anwendbar ist. So schreibt der Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851): „Es ist wahr, daß Herr Fourier der Meinung war, daß das Hauptziel der Mathematik im öffentlichen Nutzen und in der Erklärung der Naturvorgänge bestünde; aber ein solcher Philosoph wie er hätte wissen müssen, daß das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und daß unter diesem Gesichtspunkt ein Problem der Zahlen genauso wertvoll ist wie eine Frage nach dem Bau der Welt.“[5] Um zu verdeutlichen, wie sich so unterschiedliche Standpunkte entwickeln konnten, will ich versuchen, in groben Zügen die Entwicklung der Mathematik von ihren Ursprüngen bis zur Gegen-

[4] Ich beziehe mich hier auf Überlegungen, die Jakob Ossner in seinem Aufsatz „Praktische Wissenschaft“ anstellt. Dort heißt es auf S. 192 über die Fachdidaktik Deutsch: „Es geht um die Bewältigung der Aufgabe, ein Können im Gegenstandsfeld Sprache [...] auszubilden. In dieser nicht weiter spezifizierten Beschreibung ist die Aufgabe immer dieselbe, inhaltlich aber ändert sie sich mit den Subjekten, die in die Zielformulierung eingehen. Es geht ja nicht um ein allgemeines Können, sondern um das Können von jemand zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort. Daher ist es Aufgabe einer praktischen Wissenschaft Fachdidaktik, die Frage zu beantworten, wie dieses Können jeweils erreicht werden kann.“ Auf S. 197 heißt es weiter: „Eine Praktische Wissenschaft kann lehren: - Wissen im Handlungsfeld, also das didaktische Brauchtum; - Wissen über die Schüler auf der Basis einer gegenstandsorientierten psychologischen und soziologischen Forschung; - Wissen über das Gegenstandsfeld, also Funktion und genetische Struktur des Gegenstandsfeldes.“ Genauere Hintergründe zu diesen Überlegungen, die sich nicht nur auf die Fachdidaktik Deutsch, sondern auf die Fac h-didaktik allgemein beziehen, können ebd. nachgelesen werden.

[5] C. G. J. Jacobi: Werke Bd. I, S. 454f. (Brief an Legendre vom 2.7.1830). Z. n. Volk 1980: S. 31. Dort z. n. Struik, D.: Abriß der Geschichte der Mathemati k. Berlin 1967.

wart nachzuzeichnen. Bei dieser Darstellung soll im Vordergrund stehen, wie sich im Lauf der Geschichte der Mathematik das Spannungsverhältnis zwischen angewandter und „reiner“ Mathematik entwickelte.

Im zweiten Kapitel werde ich mich mit dem Begriff der Wirklichkeit beschäftigen und versuchen aufzuzeigen, in welcher Beziehung er zur Mathematik steht. Dabei möchte ich auch auf die Bedeutung der Mathematik für die Lebenswirklichkeit der Schüler heute eingehen und die Frage erörtern, welche mathematischen Fähigkeiten sie benötigen, um in der heutigen Gesellschaft zu bestehen und welche Fähigkeiten die Gesellschaft den Schülern abverlangen muß, um ihre eigene Existenz zu sichern.

Im dritten Kapitel untersuche ich auf welche Weise Mathematik in diesem Jahrhundert in Deutschland unterrichtet wurde, in welcher Weise man dabei die angewandte Mathematik in den Unterricht integrierte und welche Probleme dabei auftraten. Ausgehend von den Informationen die ich im Verlauf meiner Arbeit über die Mathematik, die Schüler mit ihren Bedürfnissen und den Mathematikunterricht gesammelt habe, werde ich schließlich Vorschläge zur Verbesserung der im Bildungs- und Lehrplan für die Realschulen in Baden-Württemberg fixierten Konzeption von Mathematikunterricht machen.

Ich hoffe, es ist mir mit meiner Arbeit gelungen, einen Überblick über Material zu geben, das sich normalerweise über viele Bücher verteilt findet: Bücher über Mathematikdidaktik, Mathematikgeschichte, Philosophie der Mathematik, Wissenschaftstheorie, Soziologie und so fort. - Material, das in Büchern über die Didaktik und Methodik des Sachrechnens häufig auf wenigen Seiten abgehandelt oder gar nicht erwähnt wird, das mir aber dennoch für die Planung von Sachrechenunterricht relevant zu sein scheint. Möge diese Arbeit den Leser erfreuen und ihm, so er Lehrer ist, bei der Gestaltung seines Unterrichts von Nutzen sein.

„Ohne die Mathematik dringt man niemals auf den Grund der Philosophie. Ohne die Philosophie dringt man niemals auf den Grund der Mathematik. Ohne beide kommt man auf den Grund von gar nichts.“[6]

Gottfried Wilhelm Leibniz

Kapitel 1: Mathematik

1.1 Streit um das Wesen der Mathematik

1.1.1 Mathematik als Unterrichtsgegenstand

Es wird wohl jeder zustimmen, daß ein Lehrer etwas von den Dingen verstehen sollte, die er unterrichtet. Nun unterrichtet ein Mathematiklehrer des ausgehenden zwanzigsten Jahrhunderts in Deutschland *Mathematik* und nicht die *Philosophie der Mathematik*. Was sein Wissen über Mathematik betrifft, so ist er durch eine mehr oder weniger normierte Lehrerausbildung in aller Regel in ausreichendem Maße damit ausgestattet - zumal er ja nur das zu unterrichten braucht, was ihm Lehrplan und Schulbuch vorgeben, sich also über die Auswahl des Stoffes keine Gedanken machen muß. Welche Bedeutung soll da die Frage nach dem Wesen der Mathematik für den Mathematiklehrer noch haben?

Zuerst einmal ist der Lehrplan keineswegs statisch. In den letzten 50 Jahren erfuhr der Lehrplan im Fach Mathematik zweimal einschneidende Veränderungen. Einmal, als die sogenannte „neue“ Mathematik eingeführt und einmal, als sie größtenteils wieder aus dem Lehrplan entfernt wurde.[7]

Dem Lehrer bleiben außerdem, innerhalb des Rahmens, den ihm der aktuelle Lehrplan vorgibt, erhebliche Gestaltungsmöglichkeiten. Er kann zur selben Thematik vollkommen unterschiedliche Unterrichtsgänge zusammenstellen, in denen er ganz verschiedene Schwerpunkte setzt. Er kann Wert darauf legen, daß die gemeinsamen mathematischen Strukturen, die hinter verschiedenen Aufgaben stehen, für die Schüler sichtbar werden. Er kann es aber auch vorziehen, den Schülern Rezepte an die Hand zu geben, mit deren Hilfe sie immer wiederkehrende Standardaufgaben lösen können. Er kann so unterrichten, daß immer wieder die Probleme oder die Möglichkeiten, die mit einer

[6] z.n. Ruben 1979: S. 4
[7] vgl. Barrow 1993: S. 60f und Strehl 1979: S. 20

zunehmenden Mathematisierung der Welt verbunden sind, deutlich hervortreten. Oder, was leider immer wieder vorkommt, er kann einfach drauflos unterrichten, ohne sich Gedanken darüber zu machen, warum er so unterrichtet und nicht anders. Welchem didaktischen Ansatz - oder Unansatz - ein Lehrer folgt, hängt von seinem Verständnis von Mathematik ab, auch wenn er sich dessen nicht bewußt ist. Er kann didaktische Entscheidungen aber erst dann wirklich zielgerichtet treffen, wenn er sich aktiv mit diesem Verständnis beschäftigt und es auf seine Angemessenheit hin prüft.

Es gibt also für den Mathematiklehrer zahlreiche Entscheidungen zu treffen, für die ein bloßes Wissen über die Verfahren der Mathematik, wie sie für gewöhnlich im Lehramtsstudium gelehrt werden, keinen ausreichenden Hintergrund liefert. Um diese Entscheidungen wirklich fundiert treffen zu können, muß er sich Fragen stellen wie: Was ist eigentlich Mathematik? Mit welchen Gegenständen befaßt sie sich? Mit welchem Ziel wird sie betrieben? In welchem Verhältnis steht sie zu anderen Wissenschaften; in welchem Verhältnis zu gesellschaftlichen Veränderungen?[8]

Daß diese Fragen selten, viel zu selten gestellt werden, scheint mir ein Zeichen dafür zu sein, daß mit der Mathematikdidaktik in Deutschland etwas im Argen liegt und ich möchte mich Dieter Volk anschließen, wenn er schreibt: „[...] daß didaktische Entscheidungen immer auch eine wissenschaftstheoretische Komponente enthalten; daß didaktische Entscheidungen ohne wissenschaftstheoretische Entscheidungen nicht möglich sind.“[9]

1.1.2 Erste Erkundungen

Bei dem Versuch, Antworten auf die Fragen zu finden, die, wie ich eben erörtert habe, Einfluß auf die Gestaltung des Unterrichts haben sollten, stößt man recht schnell auf Probleme, die John D. Barrow so beschreibt: „Halten Sie einen Biologen oder Historiker auf der Straße an und fragen ihn, was sein Fach ist; er wird keine Probleme haben, es zu erklären. Und wenn Sie keinen finden können, sehen Sie sich ein einführendes Lehrbuch zur Biologie oder Geschichte an; es wird Ihnen ungefähr auf der ersten Seite erklären, worum es dabei geht. Aber wenn sie einen Mathematiker auf der Straße fragen, wird er Ihnen nicht sagen können, was Mathematik ist. Nehmen Sie jedes beliebige Lehrbuch oder gehen Sie in eine beliebige Mathematikvorlesung - was Mathematik ist, werden sie nicht erfahren.“[10]

Nun ist die Situation nicht ganz so extrem, wie Barrow sie schildert; in der einschlägigen Literatur finden sich etliche Äußerungen von Mathematikern zu ihrem Fach, ja es finden sich sogar ganze Bücher mit Titeln wie: „Mathematiker über die Mathematik“[11] oder „Denkweisen großer Mathematiker“[12], allein sie helfen uns nicht viel weiter, eher

[8] vgl. dazu auch Brieskorn 1974: S. 221
[9] Volk 1980: S. 7
[10] Barrow 1993: S. 10
[11] vgl. Otte 1974
[12] vgl. Meschkowski 1990

im Gegenteil. Man muß bald erkennen: „Die Denkweisen der Großen in der Mathematik sind durchaus verschieden.“[13]

Da es mir, wie ich bereits erläutert habe für einen Mathematiklehrer durchaus relevant zu sein scheint, von der Mathematik mehr zu kennen, als einige Standardmethoden, und da es, wie ein erster Blick in die Literatur mir gezeigt hat, keine allgemein akzeptierten Antworten auf die oben umrissenen Fragen gibt, möchte ich versuchen, diese Antworten im ersten Kapitel meiner Arbeit selbst zu finden. Zu diesem Zweck werde ich die Mathematikgeschichte von der vorgeschichtlichen Zeit bis heute exzerpieren. Dabei möchte ich vor allem das Wechselspiel zwischen gesellschaftlicher, naturwissenschaftlicher und mathematischer Entwicklung aufzeigen; aber auch so weit als möglich darstellen, in welchem Bewußtsein die Mathematiker verschiedener Zeiten Mathematik betrieben. In diesem Zusammenhang will ich mich auch der Frage zuwenden, in wie fern eine Trennung in „reine“ und angewandte Mathematik von den Mathematikern verschiedener Zeiten tatsächlich durchgeführt wurde. Diese Frage scheint mir im Hinblick auf den Mathematikunterricht, in dem man stets gezwungen ist, die „richtige“ Balance zwischen Fachmathematik und Anwendungsbezug zu finden, von besonderer Bedeutung. Deswegen möchte ich ihn im Anschluß an den auszugshaften Durchlauf durch die Mathematikgeschichte nochmals gesondert diskutieren. Abrunden werde ich das erste Kapitel mit einer systematischen Darstellung der verschiedenen Sichtweisen von Mathematik, die zuvor in ihrem historischen Zusammenhang erörtert wurden.

[13] Meschkowski 1990: S. V

1.2 Die Wurzeln der Mathematik

1.2.1 Stochern im Nebel der Zeit

„Die Ursprünge der Mathematik liegen im Dunkeln.“[14] Vermutlich lebten die ersten Hominiden[15] vor ungefähr 4 Millionen Jahren in Afrika. Die frühesten Schriftzeichen, die uns überliefert sind, haben ein Alter von circa 6000 Jahren.[16] „Wie die Sprache selbst entwickelte sich der Gebrauch der Zahlen vor der Schrift.“[17] Auf das, was vor dieser Zeit geschah, können wir nur schließen, weil uns Funden von Knochen, Gerätschaften, Waffen, Höhlenmalereien etc. vorliegen.[18] Versucht man, die Entwicklungsstränge der Mathematik so lange in die Vergangenheit zurück zu verfolgen, bis sie sich schließlich ganz im Dunkel der Zeit verlieren, so lassen sich auf Grund der Zeugnisse, die uns vorliegen, zwei Wurzeln vermuten: Das, was Georges Ifrah „Zahlgefühl“[19] nennt und eine mystische, religiöse Erfahrung der Welt, die ihren Ausdruck in der Anwendung von Ritualen fand, die teilweise mathematische Aspekte enthielten.

1.2.2 Zahlgefühl - Zählen - Zahl

1.2.2.1 Das Zahlgefühl

Georges Ifrah zeigt im ersten Kapitel seines Buches „Die Universalgeschichte der Zahlen“ detailliert auf, wie die Entwicklung eines abstrakten Zahlbegriffes vermutlich stattgefunden hat. Da es aus der Zeit, in der diese Entwicklung stattfand, kaum Zeugnisse gibt, beruhen diese Vermutungen auch „auf den Forschungen der Kinderpsychologie und anthropologischen Untersuchungen von Völkern, die sich noch heute auf einem relativ wenig entwickelten intellektuellen Stand befinden.“[20] Ich möchte die Darlegungen Ifrahs hier nur kurz zusammenfassen und gelegentlich mit den Ausführungen anderer Autoren ergänzen.[21]

Grundlage der ganzen Entwicklung ist das sogenannte „Zahlgefühl“, das man sowohl beim Menschen als auch bei einigen Tierarten findet. „Es besteht grob gesagt darin, zwei verschiedene, begrenzte Mengen von Lebewesen oder Objekten jeweils gleicher Art voneinander zu unterscheiden.“[22] Dieses Zahlgefühl kann man leicht an sich selbst erforschen, indem man Abbildungen betrachtet, auf denen verschiedene Anzahlen von

[14] Meschkowski 1990: S. 1
[15] Hominiden waren dem heutigen Menschen ähnliche Primaten. Der Homo Sapiens, der dem heutigen Menschen gleicht, trat erstmals vor ca. 100000 Jahren auf. (vgl. Wußing 1997: S. 15)
[16] vgl. Wußing 1997: S. 15
[17] Barrow 1993: S. 12
[18] vgl. Wußing 1997: S. 13
[19] Ifrah 1986: S. 21
[20] Ifrah 1986: S. 23 (Fußnote). Zu einem psychologischen Modell der Entwicklung des Zahlbegriffes vergleiche auch das Kapitel „Einheiten, Vielheit und Zahl“ bei Glasersfeld 1997: S. 259ff.
[21] Wer sich mit dieser Thematik näher befassen will, dem empfehle ich, bei Ifrah 1986: S. 21 - 52 nachzulesen.
[22] Ifrah 1986: S. 21

Gegenständen willkürlich angeordnet sind. In der Regel ist man in der Lage, „die Zahl einer Ansammlung von Dingen auf einem Bild unmittelbar zu erfassen, wenn die Zahl nicht größer als etwa fünf ist. Ist sie aber größer, müssen wir bewußt zählen."[23] Das Zahlgefühl war vermutlich „von der Natur der Gegenstände unablösbar"[24], d.h. es war dem damaligen Menschen nicht bewußt, „daß Gesamtheiten wie Tag und Nacht, ein Hasenpaar, die Flügel eines Vogels oder die Augen, die Ohren, die Arme oder die Beine eines Menschen eine gemeinsame Grundeigenschaft haben: das 'Zweisein'."[25] Ein Hinweis darauf findet sich in den Sprachen „primitiver" menschlicher Gesellschaften, in denen oft verschiedene Wörter für die gleiche Anzahl von Dingen verwendet werden, wenn es sich um verschiedene Dinge handelt „- verschiedene Wörter für drei Fische, drei Kanus, drei Menschen, drei Steine, drei Speere."[26] Auch im Englischen, wo es Ausdrücke gibt wie „a pair of shoes", „a (musical) duet", „a brace of pheasants" und „a couple of lines", die alle mit unterschiedlichen Worten eine Zweiheit bezeichnen, läßt sich das noch feststellen.[27]

1.2.2.2 Paarweise Zuordnung

Um auch Mengen bestimmen zu können, die mit dem „Zahlgefühl" nicht mehr erfaßt werden können, „setzen die Völker, die nicht abstrakt zählen können Einheit mit Einheit in Beziehung. Dieser intellektuelle Kunstgriff [...] geht auf den Begriff des Paares zurück und besteht aus der Zuordnung der einzelnen Elemente zweier Mengen zueinander, so daß jedem Element der einen Menge ein Element der anderen entspricht."[28] Dies war wahrscheinlich der nächste Schritt in der Entwicklung. Barrow nennt dieses Verfahren „Taillieren" und führt aus: „Ein Schafhirte zum Beispiel kann eine Menge von Steinen in seiner Tasche tragen. Damit stellt er am Ende des Tages fest, ob keines fehlt, indem er für jedes Schaf, das in die Schafhürde geht, einen Stein aus der Tasche nimmt. Wenn kein Stein übrig ist, nachdem das letzte Schaf hineingegangen ist, dann ist alles in Ordnung."[29] Andere Möglichkeiten zur Taillierung bieten das Kerbholz, auf dem verschiedene Anzahlen in Form von Kerben oder sonstigen Markierungen festgehalten werden und die Glieder des menschlichen Körpers, die wie die Kerben eines Kerbholzes durchgezählt werden können. „Das hat sichtlich den Vorteil, daß jeder das gleiche Bezugssystem hat. Ist die Zahl der Finger erschöpft, zählen manche Völker am Körper entlang weiter [...]."[30]

Durch die paarweise Zuordnung ist es also möglich festzustellen, ob zwei Mengen aus der gleichen Anzahl von Elementen bestehen oder nicht. „Außerdem wird bei der paarweisen Zuordnung ein abstrakter Begriff gebildet, der eine den beiden verglichenen Mengen gemeinsame Eigenschaft bezeichnet, ein Begriff*, der von der Natur der*

---

[23] Barrow 1993: S. 19f
[24] Ifrah 1986: S. 23
[25] Ifrah 1986: S. 23
[26] Barrow 1993: S. 21
[27] vgl. Barrow 1993: S. 21
[28] Ifrah 1986: S. 34f
[29] Barrow 1993: S. 21
[30] Barrow 1993: S. 27

gegebenen Gegenstände vollkommen unabhängig ist.“[31] Damit rückte man dem abstrakten Zahlbegriff wieder ein Stück näher. „Im nächsten Schritt kann jeder betrachteten Menge eine Menge zugeordnet werden, die man ‘Hilfsmenge’ nennen könnte. Mit einer solchen ‘Hilfsmenge’ wird es möglich sein, jede Menge von Gegenständen zu beschreiben, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen umfaßt. [...] die paarweise Zuordnung ist damit eine ‘konkrete Messung’ der *Quantität* einer Menge, unabhängig von der *Qualität* ihrer Elemente. Die intellektuelle Leistung dieser Abstraktion kann als die Geburtsstunde des abstrakten Zahlenbegriffs gelten.“[32] Ifrah vermutet, daß die Zahlwörter, die diese abstrakten Mengen bezeichneten, aus den Benennungen der Körperteile die zum Abzählen verwendet wurden entstanden und durch häufigen Gebrauch nach und nach ihre „körperliche“ Bedeutung verloren.[33]

1.2.2.3 Herausbildung des Zahlbegriffs

Aber damit war die Entwicklung noch nicht an ihrem Ende. Um das möglich zu machen, was wir heute als Mathematik kennen, mußte auch noch von eben erwähnter Hilfsmenge abstrahiert werden. Dazu war ein rekursives Zahlenverständnis notwendig, das Ifrah so beschreibt: *„Jede Zahl der Reihe ganzer Zahlen, mit Ausnahme der Einheit selbst, entsteht dadurch, daß man der ganzen Zahl, die ihr vorangeht, eine weitere Einheit hinzufügt.*“[34] Dadurch wird zusätzlich zum *kardinalen*[35] Aspekt der ganzen Zahlen, der sich auf der schon erwähnten paarweisen Zuordnung gründet, der *ordinale*[36] Aspekt erschlossen, der ein Verständnis der Folge der natürlichen Zahlen voraussetzt.[37] Dantzig faßt dies sehr schön zusammen: „Wir gehen so leicht von Kardinal- zu Ordinalzahlen über, daß wir diese beiden Aspekte der ganzen Zahl nicht mehr auseinanderhalten. Wenn wir die Anzahl der Gegenstände einer Menge, also ihre Kardinalzahl, bestimmen wollen, suchen wir nicht mehr nach einer Hilfsmenge, mit der wir sie vergleichen können, wir ‘zählen’ sie ganz einfach. Dieser Fähigkeit, die beiden Aspekte der Zahl gleichzusetzen, verdanken wir unsere Fortschritte in der Mathematik. Während uns in der Praxis nur die Kardinalzahl interessiert, kann diese Zahl doch nicht die Grundlage der Arithmetik bilden, da die Rechenarten auf der stillschweigenden Voraussetzung beruhen, daß wir stets von jeder Zahl auf die ihr nachfolgende übergehen können - die Zahl also als Ordinalzahl begriffen wird. Die paarweise Zuordnung allein reicht nicht aus, um zu rechnen; ohne unsere Fähigkeit, die Gegenstände durch die natürliche Zahlenfolge zu gliedern, wäre nur ein sehr geringer Fortschritt möglich geworden. Unser Zahlensystem beruht auf den beiden Prinzipien der Zuordnung und der Rangfolge, die das Gewebe der Mathematik und aller Bereiche der exakten Wissenschaften bilden.“[38] Dieser letzte Schritt der Abstraktion wurde wohl erst im fünften

[31] Ifrah 1986: S. 35. Hervorhebung dort.
[32] Ifrah 1986: S. 35f. Hervorhebung dort.
[33] vgl. Ifrah 1986: S. 40
[34] Ifrah 1986: S. 42. Hervorhebung dort.
[35] Der Kardinalzahlaspekt bezieht sich auf die Mächtigkeit einer Menge, wie „fünf“, wenn ich sage, ich habe fünf Äpfel.
[36] Der Ordinalzahlaspekt bezieht sich auf eine Rangfolge, wie „dritter“, wenn ich sage, er ging als dritter durchs Ziel.
[37] vgl. Ifrah 1986: S. 46
[38] Dantzig, T.: Le nombre, langage de la science. Paris: 1931. S. 16f. Z.n. Ifrah 1986: S. 47

vorchristlichen Jahrhundert in Griechenland ganz vollzogen.[39]

Betrachtet man die Entwicklung des Zählens, so wird deutlich, daß sie ihren Anfang, soweit sich heute sagen läßt, mit einer sehr konkreten Wirklichkeit - mit sehr konkreten Dingen nahm, von denen dann immer mehr abstrahiert wurde, bis der Mensch schließlich den heutigen, abstrakten Zahlbegriff erreichte. Auch die Motivation zu dieser Entwicklung kam aus der Lebenswirklichkeit des Menschen, die dadurch, daß der Mensch fähig wurde zu zählen, besser beherrscht werden konnte. Schon in dieser vorgeschichtlichen Zeit finden sich also die entscheidenden Elemente einer angewandten Mathematik: die *Abstraktion*, bei der aus den Dingen um uns herum mathematische Strukturen abstrahiert werden und die *Konkretisierung*, bei der mathematische Strukturen „an speziellen Beispielen von Dingen und Ereignissen konkretisiert werden."[40]

1.2.3 Mystik - Magie - Religion

Über die Wurzel der Mathematik in der mystischen Erfahrung des Menschen läßt sich noch weniger Sicheres sagen als über die Entwicklung vom Zahlgefühl zum heutigen, abstrakten Zahlbegriff. Dies liegt wohl daran, daß die Rückschlüsse aus der Entwicklungspsychologie und der Anthropologie, die uns halfen, die mutmaßliche Entwicklung des Zahlbegriffes zu rekonstruieren, hier kaum möglich sind. Es bleibt aber dennoch einiges Material, das dafür spricht, daß eine der Wurzeln der Mathematik in einem mystischen Weltverständnis und den damit verbundenen Ritualen zu suchen ist.

1.2.3.1 Zahlen und das Gesetz der Berührung

Es gibt Vermutungen, nach denen dieser mystische Aspekt nicht nur ebenso alt ist wie die ersten Anfänge des Zählens, sondern unter Umständen erst zu seiner Entwicklung geführt hat. „Bemerkenswert ist die Tatsache, daß sich in jenen Systemen, die mit Zahlwörtern für 'eins', 'zwei' oder auch 'drei' und deren Reihungen bis zu Ausdrücken für nicht mehr als 'zehn' arbeiten, keine Anzeichen dafür finden, daß sie vom Fingerzählen herkommen. Sie scheinen aus primären Intuitionen und der Erfahrung mit Paarungen zu stammen."[41] So könnte sich das Zählen also aus Ritualhandlungen „primitiver" Kulturen entwickelt haben. „Eine verbreitete Form von Fruchtbarkeitsritualen schließt die Paarung von männlichen und weiblichen Tieren oder auch Menschen ein. Dies könnte nicht nur der Ursprung elementarer Zahlenbegriffe sein, sondern auch die Wurzel einiger merkwürdiger, in verschiedenen Kulturen verbreiteter

[39] vgl. Barrow 1993: S. 28
[40] Barrow 1993: S. 15
[41] Barrow 1993: S. 25f

Traditionen wie dem Glauben, daß ungerade Zahlen männlich sind, gerade weiblich oder daß es gewisse Unglückszahlen gibt.“[42]

Auch von der nächsten Stufe des Zählens, dem paarweise Zuordnen, bei dem oft die Finger und weitere Körperglieder als Hilfsmenge verwendet wurden, lassen sich Verbindungen zu einer mystischen Weltsicht ziehen. „Indem die Zahlen bestimmten Körperteilen assoziiert werden, wird es unnötig, sie auszusprechen. Das könnte mit den weit verbreiteten Tabus in Zusammenhang stehen, die auf dem Zählen von Menschen liegen. In vielen alten und neuen Kulturen finden sich Spuren solcher Tabus, so etwa daß es Unglück bringt, seine Kinder zu zählen, sein Geld oder - als König - seine Untertanen.“[43] Möglich ist meiner Ansicht nach auch, daß sich gewisse Glücks- und Unglückszahlen dadurch ergaben, daß sie immer wieder mit Körperteilen in Bezug gesetzt wurden, die man mehr oder weniger hoch schätzte.

Für solche Zusammenhänge sprechen auch anthropologische Untersuchungen über das magische Weltbild „primitiver“ Kulturen. James G. Frazer, der als einer der ersten ausgiebig auf diesem Gebiet geforscht hat, stellt in seinem Buch „Der goldene Zweig“ verschiedene Prinzipien dar, die im magischen Denken immer wieder auftreten. Unter anderem spricht er vom „Gesetz der Berührung.“[44] „Der [...] große Zweig der sympathetischen Magie, den ich Übertragungsmagie genannt habe, geht über zu dem Gedanken, daß Dinge, die einmal verbunden waren, für alle Zeiten, selbst wenn sie völlig voneinander getrennt sind, in einer solchen sympathetischen Beziehung zueinander bleiben müssen, daß, was auch immer dem einen Teil geschieht, den anderen beeinflussen muß.“[45] Die Beispiele, die Frazer im folgenden anführt, beziehen sich zwar ausschließlich auf materielle Dinge, es scheint mir aber einleuchtend, daß diese Art zu denken, auch leicht auf abstrakte Vorstellungen übertragen wurde, z.B. auf Zahlen, die man mit bestimmten Körperteilen assoziierte.

1.2.3.2 Geometrie und das Gesetz der Ähnlichkeit

Auch im Bereich der Geometrie gibt es vieles, was für einen frühen rituellen Gebrauch spricht, der einer mystischen Weltsicht entspringt. Geometrische Strukturen lassen sich an Hand konkreter Quellen zeitlich viel weiter zurückverfolgen als die Zahlen, da sie schon vor der Erfindung der Schrift aufgezeichnet werden konnten. „An Quellen haben wir eine Fülle von verschiedenartigsten Ornamenten mit geometrischen Strukturen - Dreieck, Quadrat, Rechteck, Rhombus, Kreis, Zick-Zack-Linie, spitze und stumpfe Winkel - auf Tongefäßen, auf Waffen, in Flecht- und Webereierzeugnissen.“[46] Aus der hohen rituellen Bedeutung, die geometrischen Formen zu Beginn der geschichtlichen Zeit - vor allem in Indien - zukommt, läßt sich vermuten, daß sie auch in vorgeschichtlicher Zeit schon eine große rituelle Bedeutung besaßen.
„Die Fähigkeiten und Kenntnisse der alten Inder kommen aus religiös-rituellen Wur-

[42] Barrow 1993: S. 27
[43] Barrow 1993: S. 27
[44] vgl. Frazer 1968: S. 15
[45] Frazer 1968: S. 54
[46] Wußing 1997: S. 13

zeln; in ihrer Kultur boten die Rituale starke Motivationen und noch sehr viel komplexere Aufgaben für das mathematische Denken als die primitiven Fruchtbarkeitsrituale."[47] So mußten zum Beispiel die Altäre insbesondere der vedischen Tradition nach sehr genauen geometrischen Vorschriften gebaut werden. „Die Vorschriften für die Konstruktion derartiger Altäre waren in den *Sulva Sutra* kodifiziert, einer Reihe von Büchern, in denen Traditionen zusammengefaßt sind, die zwischen 1000 und 5000 v. Chr. aufgekommen sind."[48] War es schon schwierig genug, Altäre in der Form von Quadraten, Halbkreisen oder sogar in stilisierten Tierformen, wie der eines Falken zu bauen, so gab es noch größere Herausforderungen: unter bestimmten Voraussetzungen, z.B. wenn die Götter aus irgendeinem Grund erzürnt schienen, sahen die Vorschriften die genaue Verdoppelung der Fläche des Altares vor.[49] „Um diese Aufgaben lösen zu können, mußten die Priester der Veda Lösungen für eine große Zahl geometrischer Konstruktionsprobleme finden."[50]

Aber nicht nur die vedische Tradition verwendete in ihren religiösen Zeremonien geometrische Elemente, sondern auch der tantrische Kult, der auf den Tantras beruht. „Die *Tantras*, eine Reihe von Büchern in Sanskrit, stammen aus dem 6. Jahrhundert n. Chr., beruhen jedoch auf einer älteren Tradition. Teil der meditativen Übung ist die Kontemplation Komplexer *Yantras*, die den Geist vom Komplizierten zum Einfachen und umgekehrt führen soll."[51]

Eines der ausgefeiltesten Yantras ist das Sriyantra, das auch den Titel meiner Arbeit schmückt. Der innere Teil, das „Siegel" des Mantras, besteht aus neun gleichschenklichen Dreiecken, die durch Überschneidungen ein Netz von 43 Dreiecken bilden.[52] "Dieses zentrale 'Siegel' ist von konzentrischen Kreisen und Lotusblättern umgeben, die wiederum durch ein Quadrat eingerahmt sind, dessen vier 'Türen' in die Unterwelt des Chaos führen. Im Zentrum der Dreiecke befindet sich ein einzelner Punkt, von dem die Meditation ausgeht oder zu dem sie hingeht, je nach dem ob man über die Schöpfung der Ordnung aus dem Chaos meditiert oder über die Entwicklung der Welt vom einfachen Beginn zur großen Komplexität."[53]

Ließen sich Parallelen vom rituellen Hintergrund der Zahlen und des Zählens zum magischen Gesetz der Berührung ziehen, so scheint die rituelle Verwendung geometrischer Strukturen mit dem magischen „Gesetz der Ähnlichkeit"[54] in Verbindung zu stehen. Dieses besagt nach Frazer, „daß Gleiches wieder Gleiches hervorbringt, oder daß eine Wirkung ihrer Ursache gleicht [...]."[55] Eine Geisteshaltung also, die durchaus unterstellt werden darf, wenn beispielsweise ein Altar vergrößert wird, um eine größere Gewogenheit der entsprechenden Gottheit zu erlangen. Auch bei der meditativen Ar-

[47] Barrow 1993: S. 42
[48] Barrow 1993: S. 43. Hervorhebung dort.
[49] vgl. Barrow 1993: S. 43f
[50] Barrow 1993: S. 44
[51] Barrow 1993: S. 44. Hervorhebung dort.
[52] vgl. Barrow 1993: S. 47
[53] Barrow 1993: S. 47
[54] Frazer 1968: S. 15
[55] Frazer 1968: S. 15

beit mit Yantras, die vor einem sehr komplexen philosophischen Hintergrund stattfand, spielt diese Haltung vermutlich noch mit herein, stellen Yantras doch symbolische Abbilder des Universums dar.

1.2.3.3 Zwei Sichtweisen

Auch wenn eine Wurzel der Mathematik in einer mystischen oder magischen Weltsicht liegt, dürfen die Unterschiede zwischen Magiern und Mathematikern nicht vergessen werden und das, obwohl die Mathematik sicher manchem, dem sie verschlossen bleibt, mitunter wie Zauberei erscheinen mag. „Der Mathematiker unterscheidet sich vom Zahlenmystiker darin, daß er den Zahlen selbst keine tiefere Bedeutung beimißt und sich nur für ihre Beziehungen untereinander interessiert.“[56] Ähnliches kann über die Bedeutung geometrischer Strukturen in mathematischer und magischer Weltsicht gesagt werden. Im Lauf der Geschichte hat sich ein „nüchterner“ Umgang mit mathematischen Strukturen immer mehr durchgesetzt, trotzdem finden wir auch heute noch - in der Numerologie, Astrologie und dem Glauben an Glücks- und Unglückszahlen - die Vorstellung, daß sich hinter Zahlen und Figuren mehr verbirgt, daß sie „selbst eine *Bedeutung* haben, die nur durch ihre richtige Interpretation zu enthüllen ist.“ [57]

Es gab im Laufe der Geschichte allerdings immer wieder bedeutende Naturwissenschaftler und Mathematiker, denen auch eine magische Weltsicht nicht fremd war. Als Beispiele aus verschiedenen Epochen möchte ich hier nur Pythagoras und Johannes Kepler anführen. Hans Wußing schreibt über die Pythagoräer, den politisch-religiösen Geheimbund, den Pythagoras (ca. 582-507 v. Chr.) gründete: „Das Spezifische dieses Bundes bestand darin, daß die Vereinigung mit dem Göttlichen durch Versenkung in die wunderbaren Gesetze der Zahlenwelt erreichbar sein sollte, da das Wesen der Welt in dieser Harmonie der Zahlen bestehe. [...] Nach pythagoreischer Ansicht sind Zahlen nicht das Ergebnis eines von Menschen vorgenommenen Abstraktionsprozesses von der objektiven Realität, sondern selber objektive Gegebenheiten, ausgestattet mit Eigenschaften wie Haß und Liebe, männlich und weiblich. [...] Übrigens galt die Eins den Pythagoräern nicht als Zahl, sondern als ‘aller Dinge Anfang’ als die ‘Quelle und Wurzel der ewigen Natur’“[58] Kepler (1571-1630) beschäftigte sich mit der Frage, warum es gerade sechs Planeten gab (so viele waren zu seiner Zeit bekannt) und kam zu dem Schluß, „daß der Grund für die Beschränkung der Planeten auf sechs in der Fünfzahl der regelmäßigen Körper[59] zu suchen sei, die, ineinandergepackt oder -gesteckt den Abstand der Planeten zur Sonne bestimmten. In diesen vollkommenen Formen glaubte er die unsichtbaren Träger der sechs Planetensphären erkannt zu haben. Diese

[56] Barrow 1993: S. 13
[57] Barrow 1993: S. 13. Hervorhebung dort.
[58] Wußing 1989: S. 48f
[59] Die fünf regelmäßigen oder ‘platonischen’ Körper sind: Tetraeder, Oktaeder, Hexaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. (vgl. Jansen, Küpperbusch, Lordick 1995: S. 257f)

Offenbarung nannte er ‘Das Weltgeheimnis’ (mysterium Cosmographicum), hinter dem er die Hand Gottes, des Himmlischen Geometers zu entdecken vermeinte [...].“[60]

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Verwendung von mathematischen Strukturen in mystischen, magischen oder religiösen Ritualen auf der Vorstellung beruht, daß alle Dinge durch ein geheimes, das heißt nicht offen sichtbares Prinzip miteinander verbunden sind. Diese Verbindungen zeigen sich zwar in der Gleichartigkeit bzw. der Aufeinanderfolge mancher Dinge oder Geschehnisse, was zu den oben erwähnten Gesetzen der Berührung und der Ähnlichkeit führt - aber diese Gleichartigkeit bzw. Aufeinanderfolge ist verborgen, also nur dem Magier, der über ein bestimmtes Geheimwissen verfügt, ersichtlich.[61] Zu diesem Geheimwissen, mit dessen Hilfe der Magier nicht nur Verbindungen zwischen Dingen und Ereignissen zu erkennen, sondern auch zu beeinflussen hofft, gehören mitunter auch mathematische Kenntnisse. Auch hier, wie schon bei der Entwicklung des Zählens, finden wir die Schritte der *Abstraktion* und der *Konkretisierung*. Der Magier versucht aus den Dingen und Ereignissen der Welt - wie er sie wahrnimmt - bestimmte Zusammenhänge zu abstrahieren und konkrete Ergebnisse in der Welt zu erzielen, indem er sie mittels dieser Prinzipien manipuliert.

Dennoch findet bei der zunehmenden Kontrolle der Welt über das Zählen etwas vollkommen anderes statt, als bei einer magischen Kontrolle der Welt. Der Zählende bringt durch seine Tätigkeit Struktur in eine ungeordnete Welt, wohingegen der Magier Strukturen aufdeckt, die in der Welt schon vorhanden sind. Es ist interessant, wie sich in diesen beiden Verhaltensweisen, die eng mit den Wurzeln der Mathematik verbunden sind, zwei grundlegende philosophische Sichtweisen über das Wesen der Mathematik widerspiegeln: die Sichtweise derer, die glauben die Mathematik komme aus dem menschlichen Geist und die Sichtweise derer, die glauben, sie komme von außerhalb des Geistes. „Die ersten glauben, daß wir Mathematik als nützliche Beschreibung der Ereignisse um uns herum erfinden, daß sie einfach das ist, was Mathematiker produzieren. Die anderen glauben, daß wir die Mathematik entdecken, daß sie irgendwo ‘da draußen’ ist und daß sie dort auch wäre, wenn es keine Mathematiker gäbe.“[62] Im folgenden wird sich noch zeigen, daß die Vertreter der „reinen Mathematik“ eher den „Magiern“ zuzuordnen sind, wohingegen die Vertreter einer anwendungsorientierten Mathematik eher zu den „Zählern“ gehören.

[60] Sagan 1980: S. 69
[61] vgl. Frazer S. 15ff
[62] Barrow 1993: S. 10f

1.3 Die Entwicklung der Mathematik

1.3.1 Algorithmische Mathematik

1.3.1.1 Die Entstehung der ersten Hochkulturen

In der frühen Jungsteinzeit[63] lebten die Menschen „in abgegrenzten sozialen Inseln von Dorfgemeinschaften.“[64] Im dritten Jahrtausend v. Chr. entstanden an verschiedenen Orten neue Gesellschaftsformen - die ersten Hochkulturen. Diese neuen Gesellschaften zeichneten sich dadurch aus, daß in ihnen sehr viel mehr Menschen zusammenlebten, als in den früheren Dorfgemeinschaften. Sie wurden meistens autoritär und zentral regiert und erstreckten sich über ein ansehnliches Gebiet, das sie noch auszudehnen suchten. Diese Gesellschaften boten viele neue Möglichkeiten, verlangten den Menschen aber auch neue Anforderungen ab. Sie erlaubten die Spezialisierung von Menschen auf bestimmte Tätigkeiten in einem Ausmaß, in dem diese zuvor nicht möglich war, machten diese Spezialisierung aber gleichzeitig notwendig, weil das Leben in einem Gemeinwesen dieser Größe sonst nicht mehr zu organisieren gewesen wäre.[65] “Mathematische Methoden ermöglichten das Funktionieren der frühen hierarchischen Königsherrschaften: Gerechtigkeit in der Besteuerung, Effizienz in der Versorgung großer Arbeiter- und Soldatenheere, Beweise der königlich-göttlichen Omnipotenz durch astronomische und meteorologische Vorhersagen und Standardisierung menschlicher Aktivität erforderten einen formal-bürokratischen Apparat, der auf die formale Kraft mathematischer Größen und deren Manipulation nicht verzichten konnte.“[66]

Die Mathematik in den ersten Hochkulturen blieb aber zunächst strikt algorithmisch orientiert. Mathematische Methoden wurden angewandt, aber ohne sie zu reflektieren oder gar den Versuch zu unternehmen, sie zu beweisen.[67] Kotzmann begründet dies so: „In einer strikt hierarchischen Gesellschaftsform ist die Frage nach dem ‘Warum’, nach einem Beweis sinnlos, da Wahrheit von der Spitze der Gesellschaftspyramide bestimmt wird und je nach Effizienz von den darunterliegenden Gesellschaftsschichten zu akzeptieren ist. Mathematik, die diese gut organisierten Staatsgebilde des alten Orients erst ermöglichte, erstarrte in einem beharrenden Dogmatismus, der zwar die bürokratischen Aufgaben im Staat erfüllen konnte, aber keine weitere Entwicklung zuließ.“[68] Aus den Hochkulturen von Ägypten, Mesopotamien, Indien, China und Mittelamerika liegen uns Zeugnisse für algorithmische Mathematik vor.

1.3.1.2 Mathematik in Ägypten

Die ägyptische Hochkultur entstand ca. 3000 Jahre vor unserer Zeitrechnung. Unser

[63] Als Jungsteinzeit wird die Zeit von ca. 4500 v. Chr. bis ca. 2000 v. Chr. betrachtet. (vgl. Wußing 1997)
[64] Kotzmann 1988: S. 5
[65] vgl. Kotzmann 1988: S. 5f
[66] Kotzmann 1988: S. 6
[67] vgl. Kotzmann 1988: S. 6
[68] Kotzmann 1988: S. 6

Wissen über die Mathematik der Ägypter stammt hauptsächlich aus drei überlieferten mathematischen Texten, die alle aus der Zeit des Mittleren Reiches (ca. 2040 - 1788 v. Chr.) stammen. Es handelt sich um den „Papyrus Rhind“, den „Papyrus Moskau“ und die sogenannte „Lederrolle“. Mathematik wurde in Ägypten hauptsächlich von Schreibern betrieben, einer Art von „Staatsbeamten“ die alle wichtigen Verwaltungsaufgaben wahrnahmen.[69] Die altägyptische Mathematik „verfügte über ein dezimales Zahlensystem, eine durchgefeilte Bruchrechnung, vermochte lineare Gleichungen aufzulösen, geometrische Reihen traten auf, es gab den Begriff des Winkels, man vermochte einfache Flächen (Quadrat, Rechteck, Dreieck) und Volumina (Würfel, Quader) zu berechnen.“[70] Der vergleichsweise hohe Entwicklungsstand der Geometrie steht vor allem im Zusammenhang mit dem Nilhochwasser, daß es notwendig machte, die Felder jedes Jahr neu zu vermessen.[71] Dabei war die Mathematik der Ägypter „noch keine ‘Wissenschaft’, sondern ein (freilich sehr geschätztes) Hilfsmittel für Verwaltung und Wirtschaft.“[72]

1.3.1.3 Mathematik in Mesopotamien

Um 3200 v. Chr. wanderten die Sumerer nach Mesopotamien, in den von den beiden Flüssen Euphrat und Tigris durchflossenen Landstrich ein und begründeten dort ab ca. 3000 v. Chr. die erste Hochkultur. Später lösten sich in diesem Landstrich Akkader, Babylonier, Assyrer, Hethiter und Perser mit der Herrschaft ab. Über die mesopotamische Mathematik ist uns ungleich mehr bekannt als über die ägyptische, wahrscheinlich, weil die Tontafeln, auf die man in diesem Gebiet zu schreiben pflegte, sich einfach besser hielten als die ägyptischen Papyri.[73] „Gemessen an der ägyptischen, stand die mesopotamische Mathematik auf einem wesentlich höheren Niveau. Aber auch hier war sie primär von gesellschaftlichen Anforderungen geprägt. Typisch für Mesopotamien war ein ausgebreitetes System künstlicher Bewässerung; folgerichtig nehmen Wasserbauprobleme wie Kanalbau, Dammbau, Feldvermessung einen hervorragenden Anteil in den mathematischen Texten ein. Hervorzuheben ist auch der außerordentlich hohe Stand der Rechentechnik, die [...] schon Züge echter algebraischer Verfahrensweisen enthält. Diese auffällige Erscheinung erklärt sich wohl auch daraus, daß Mesopotamien gezwungen war, einen ausgedehnten Handel - Holz, Steine, Erze - zu unterhalten, da es kaum entsprechende natürliche Reichtümer besaß.“[74] Die Babylonier entwickelten ein sexagesimales Positionssystem, dem im 6. Jh. v. Chr. sogar noch ein inneres Lückenzeichen, das Teile der Funktion des heutigen Nullzeichens übernehmen konnte, hinzugefügt wurde. Das Sechzigersystem der Babylonier hat bis heute, in unserer Aufteilung der Stunde in Minuten und Sekunden und in der Unterteilung der Winkel in Grad, Minuten und Sekunden überdauert.[75] Außerdem findet man in der mesopotamischen Mathematik „die Auflösung von speziellen Gleichungen bis zum Grade 4, lineare Gleichungssysteme, arithmetische und geometrische Reihen, Quadrat-

[69] vgl. Wußing 1997: S. 17f
[70] Wußing 1997: S. 17
[71] vgl. Kropp 1994: S. 10f
[72] Kropp 1994: S. 10
[73] vgl. Wußing 1997: S. 15
[74] Wußing 1989: S. 33
[75] vgl. Wußing 1997: S. 15f

4, lineare Gleichungssysteme, arithmetische und geometrische Reihen, Quadrat- und Kubikwurzeln, den pythagoreischen Lehrsatz (zeitlich weit vor Pythagoras), in der Geometrie den Thalessatz (weit vor Thales) und bei Dammbauten die Benutzung eines Böschungswertes, der dem trigonometrischen Kotangens äquivalent ist.“[76]

1.3.1.4 Mathematik in Indien

Bereits im 4. Jahrtausend v. Chr. entstanden im Industal im Nordwesten Indiens, die ersten Kulturen städtischen Zuschnitts. Uns blieben aus dieser Zeit schriftliche Dokumente erhalten, die allerdings noch nicht entziffert werden konnten, aus denen sich jedoch einiges über die mathematischen Kenntnisse der Induskulturen entnehmen läßt.[77] „Das Zahlsystem war Dezimal. [...] An geometrischen Figuren waren Dreieck, Quadrat, Rechteck, Kreis, Kegel, Zylinder, Würfel u.a.m. bekannt. [...] Aus Verzierungen an Vasen, Reliefs u.ä. kann man schließen, daß die Menschen der Induszivilisationen gewisse Kenntnisse über Projektionen und Ähnlichkeiten gehabt haben [...].“[78] Im 2. Jahrtausend v. Chr. gingen die frühen Induskulturen unter. Einige Jahrhunderte später drangen arische Stämme aus Zentralasien in Indien ein. Mit ihrer Seßhaftwerdung entstand eine neue Hochkultur. In dieser Zeit entstanden vermutlich die schon zuvor erwähnten *Sulva Sutra*[79] mit ihren Vorschriften für den Altarbau.[80] „Die Hauptwerke der indischen Mathematik sind jedoch erst zwischen dem 2. (oder 5.) Jh. u. Z. und dem 16. Jh. entstanden, in einigen Teilen deutlich unter hellenistischem Einfluß, z.B. in der Trigonometrie.“[81] „Die Entdeckung der Null durch die Inder und damit das Gewinnen eines dezimalen Stellenwertsystems steht erst am Beginn des Mittelalters.“[82] „Die Haupttriebkräfte der Entwicklung der Mathematik im alten Indien hat man im Handel und in der engen Verbindung zur Astronomie zu suchen.“ [83]

1.3.1.5 Mathematik in China

Ungefähr im 3. Jahrtausend v. Chr. entstand in China eine Hochkultur. Im Laufe der Chinesischen Geschichte lösten sich immer wieder verschiedene Herrschaftsdynastien ab.[84] „Mathematik war vorgeschriebener Ausbildungsgegenstand der Beamten des Riesenreiches. Rechenbretter dürften bereits im ersten Jahrhundert v. u. Z. in Gebrauch gewesen sein. Trotz unterschiedlicher Zahlenschreibweise - Stäbchen- oder Bambusziffern waren vom 2. Jh. v. u. Z. bis zum 12./13. Jh. in häufigem Gebrauch - war ein Positionssystem zur Basis 10 seit dem 3. Jh. v. u. Z. üblich. die noch fehlende ‘Null’ gelangte vermutlich aus Indien nach China.“[85] Als im 16. Jahrhundert der europäische Einfluß in China spürbar wurde, hatte die Mathematik schon ein sehr hohes Niveau

---

[76] Wußing 1997: S. 16
[77] vgl. Wußing 1989: S. 87
[78] Wußing 1989: S. 87
[79] Von manchen Autoren auch ‘Sulba-Sûtra’ geschrieben, z.B. Wußing 1989 und 1997.
[80] vgl. Wußing 1989: S. 87
[81] Wußing 1997: S. 27
[82] Kropp 1994: S. 18
[83] Wußing 1997: S. 27
[84] vgl. Wußing 1997: S. 24
[85] Wußing 1997: S. 24f

erreicht. Die Chinesen machten auch eine Reihe wichtiger Erfindungen, zu nennen sind hier unter anderem: Porzellan, Papier, Buchdruck, Schießpulver, Rakete und Kompaß.[86] „Allerdings besaß die chinesische Mathematik nicht jene innere Strenge wie die griechisch-hellenistische Mathematik; häufig fehlen die Beweise.“[87]

1.3.1.6 Mathematik in Süd- und Mittelamerika

In Süd- und Mittelamerika waren die Hochkulturen der Mayas (Halbinsel Yukatán), Inkas (Equador, Peru, Bolivien, Chile) und Azteken (Mexiko) beheimatet. Die Kultur der Mayas ist die älteste und hatte zwischen 300 und 900 n. Chr. ihre erste Hochperiode. 1492 entdeckten spanische Seefahrer den neuen Erdteil.[88] „Durch den fanatischen Zerstörungswillen der Eroberer sind bis auf wenige Ausnahmen die meisten Zeugnisse über die Wissenschaften im Inkareich, bei den Azteken und bei den Maya-Völkern systematisch vernichtet worden. Durch Zufall nur blieben drei Maya-Handschriften erhalten; die Entzifferung[89] bietet noch immer Schwierigkeiten.“[90] So wissen wir von der Mathematik der Mayas nicht viel. Sie benutzten ein Positionssystem zur Basis Zwanzig und kannten ein Nullzeichen.[91] „Mathematik stand - wie bei den Azteken - in engem Zusammenhang mit der Astronomie; diese war in Teilen - z.B. bei der Bestimmung der Dauer des Jahres - der damaligen europäischen Astronomie überlegen.“[92]

Wie wir gesehen haben, hat sich, zeitlich mehr oder weniger parallel, in verschiedenen Hochkulturen eine algorithmische Mathematik entwickelt. Dabei orientierte sich die Mathematik an den speziellen Bedürfnissen der jeweiligen Kultur, gleich ob diese jetzt materiell, wie bei der Feldvermessung nach den Nilhochwassern in Ägypten oder geistig, wie bei der rituellen Altarvergrößerung in Indien waren. Auch in Griechenland entwickelte sich zunächst eine algorithmische Mathematik, die Griechen waren aber „die ersten, die über mathematische Verfahren reflektierten, die mathematische Verfahren zu beweisen für notwendig hielten und die nicht mehr allein nach dem ‘Wie’, sondern auch nach dem ‘Warum’ fragten.“[93] Sie taten also den entscheidenden Schritt von der algorithmischen zur axiomatischen Mathematik und deswegen möchte ich mich ihnen im folgenden besonders zuwenden.

1.3.2 Axiomatische Mathematik

1.3.2.1 Ein entscheidender Schritt

Die entscheidenden Entwicklungen in der griechischen Mathematik fanden in der Zeit zwischen 600 v. Chr. und 500 n. Chr. statt. Schon ab ca. 2000 v. Chr., vielleicht auch

[86] vgl. Wußing 1997: S. 24ff
[87] Wußing 1997: S. 26
[88] vgl. Wußing 1997: S. 36
[89] Der Physiker und Nobelpreisträger Richard Feynman beschreibt in seinem autobiographischen Buch „Sie belieben wohl zu scherzen Mr. Feynman!“ auf erfrischende Weise seine Entzifferungsversuche am sogenannten „Kodex Dresden“, einer der drei erhaltenen Maya Schriften. (vgl. Feynman 1991: S. 414-420)
[90] Wußing 1997: S. 36
[91] vgl. Wußing 1997: S. 36
[92] Wußing 1997: S. 36
[93] Kotzmann 1988: S. 6

etwas früher, hatte sich die kretisch-mykenische Kultur entwickelt, die sich um 1000 v. Chr. über den ganzen kleinasischen Raum auszubreiten begann. Aus dieser Zeit sind keine eigenständigen mathematischen Entwicklungen der Griechen bekannt.[94] Dann plötzlich fand ein Umbruch statt, nicht nur in der Mathematik, sondern im gesamten menschlichen Denken. Ein Umbruch, so einschneidend, daß er unsere Welt bis zum heutigen Tag entscheidend prägt. Wie konnte es dazu kommen?

Wir wissen darüber, wie in historischen Fragen oft der Fall, nichts Sicheres. Verschiedene Autoren haben verschiedene Anschauungen und es war wohl auch ein Zusammenspiel vieler Faktoren, das zu dieser einschneidenden Zäsur in der menschlichen Geistesgeschichte führte.[95] Damit sich jeder Leser selbst ein Urteil bilden kann, möchte ich die Faktoren, von denen angenommen wird, daß sie die Griechen bei diesem großen Sprung in der Entwicklung beeinflußt haben, hier kurz zusammenfassen:

- Die umliegenden Hochkulturen hatten ihren Zenit überschritten und die griechische Kultur breitete sich rasch aus.[96]
- Eisen ersetzte zunehmend Bronze als Gebrauchsmetall, wodurch die Produktivität erhöht werden konnte.[97]
- Mit den bei der Besiedlung des Mittelmeerraums gegründeten Stadtstaaten entstanden neue, zum Teil demokratische Staatsgebilde, in denen die Bürger ein großes Maß an Freiheit und Mitspracherecht genossen.[98]
- Die Menschen der eroberten Gebiete wurden oft als Sklaven gehalten, was den Sklavenhaltern die Möglichkeit gab, sich mit „Kunst, Kultur, Philosophie und Wissenschaft zu beschäftigen."[99]
- In der griechischen Kultur erlangte der Handel einen neuen Stellenwert. Zuvor stand der Gebrauchswert einer Ware im Vordergrund, der für verschiedene Menschen ganz unterschiedlich sein konnte. Bei den Griechen jedoch wurde der Tauschwert einer Ware zunehmend wichtig. „Ware zu tauschen, heißt nun ein Produkt gegen ein anderes zu geben, wobei real während des Tausches der Gebrauchswert der Ware völlig in den Hintergrund tritt und einzig allein auf die Gleichheit des abstrakten Tauschwertes der Güter geachtet wird."[100] Diese Abstraktion, mit der die Menschen

[94] vgl. Wußing 1997: S. 19ff
[95] vgl. Wußing 1997: S. 20
[96] vgl. Wußing 1989: S. 42
[97] vgl. Wußing 1989: S. 42
[98] vgl. Wußing 1989: S. 42
[99] vgl. Wußing 1989: S. 42f
[100] Kotzmann 1988: S. 7

zunehmend im täglichen *Handeln* konfrontiert waren, begünstigte vermutlich die Entwicklung hin zum Denken in abstrakten Begriffen.[101]

- Besonderheiten im Denken der Griechen: *Rationalismus* - der Glaube an die Kraft der menschlichen Vernunft, *Kritizismus* - ein kritisches Verhältnis zur Erkenntnis der Wirklichkeit und *Dynamismus* - die Bereitschaft zur Veränderung von Weltbildern.[102]

Die Entwicklung der griechischen Mathematik wird in der Regel in vier Perioden unterteilt. Die ionische Periode (ca. 600 - 450 v. Chr.), die athenische Periode (ca. 450 - 300 v. Chr.), die hellenistische oder alexandrinische Periode (ca. 300 v. Chr. - 150 n. Chr.) und eine Periode des Niederganges in der die Produktivität immer mehr abnahm, bis sie mit dem Zusammenbruch des römischen Imperiums schließlich ganz erlosch.[103]

1.3.2.2 Die ionische Periode

Die ionische Periode ist benannt nach den griechisch-ionischen Stadtstaaten an der Küste Kleinasiens. In diesen Stadtstaaten, wirkte eine Reihe von großen Philosophen, wie Anaximandros, Anaximenes und Thales, die versuchten, die Welt nicht nur zu beschreiben, sondern auch zu erklären. Mit einer ganz entsprechenden Einstellung wandte man sich im folgenden auch der Mathematik zu:[104] „Es wird das Wesen der Definition erkannt. Beweise für Sätze werden geführt auf Grund der Einsicht in den mathematischen Sachverhalt. Der mathematische Sachverhalt, der zum Teil aus Mesopotamien und Ägypten übernommen werden konnte, erhielt nun eine logische Struktur, und es kam zu klaren begrifflichen Unterscheidungen von Voraussetzung, Satz und Beweis. Die Wissenschaft Mathematik wurde geboren.“[105] Herausragende Mathematiker der ionischen Periode waren Thales von Miletos, der auch als Philosoph von sich reden machte und schon in der Antike als einer der sieben Weltweisen galt, Demokritos von Abdera, der eine Atomtheorie entwickelte, Hippokrates von Chios, der schon vor Euklid eine Darstellung der Geometrie unter dem Titel „Elemente“ verfaßte und Pythagoras von Samos.

„Der Überlieferung nach hat Pythagoras nach längeren Aufenthalten in Ägypten und Mesopotamien, wo er mit verschiedenen Mysterienkulten in Verbindung kam, in Unteritalien einen politisch-religiösen Geheimbund gegründet, der zeitweise eine große politische Macht besaß [...]. Der Orden erlosch um die Mitte des 4. Jh.“[106] Die Pythagoräer waren motiviert durch den Glauben: „Daß die Bahnen der Sterne, aber auch die Gesetze der musikalischen Harmonie und der architektonischen Schönheit bestimmt waren durch einfache [...] Verhältnisse ganzer Zahlen: ‘Die ganze Welt ist Harmonie und Zahl’“[107] Aus dieser Motivation heraus untersuchten sie Eigenschaften

[101] vgl. Kotzmann 1988: S. 6f - Kotzmann bezieht sich in seinen Ausführungen auf: Sohn-Rethel, A.: Geistige und körperliche Arbeit. Frankfuhrt a. M.: Suhrkamp 1972.
[102] Kotzmann 1988: S. 6 - Kotzmann bezieht sich hierbei auf: Kredovskij, O.I.: Wechselbeziehungen von Philosophie und Mathematik im geschichtlichen Entwicklungsprozeß. Leipzig: Teubner 1984.
[103] vgl. Wußing: 1989: S. 43
[104] vgl. Wußing: 1989: S. 44f
[105] Wußing 1989: S. 45
[106] Wußing 1989: S. 48

und Zahl'"[107] Aus dieser Motivation heraus untersuchten sie Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten im Bereich der Zahlen, formulierten abstrakte Sätze und bewiesen sie[108] - jedoch nicht, um die so gewonnenen Erkenntnisse zur Naturbeherrschung anzuwenden. „Die Philosophen und Mathematiker der späteren Zeit stellten sehr klar heraus, daß sich die 'theoretischen Forschungen (der Pythagoräer) frei von materiellen Einflüssen im Bereich des reinen Denkens bewegten', so heißt es etwa im sog. 'Geometerkatalog', einer Art Geschichte der Mathematiker der Antike, die von einem spätantiken Wissenschaftler verfaßt wurde."[109] Die Pythagoräer trieben also schon das, was wir heute „reine" Mathematik nennen würden. Um die Mitte des 4. Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung herum erlosch der Orden der Pythagoräer. Wahrscheinlich trug, neben politischen Gründen, die Entdeckung der irrationalen Zahlen in Form inkommensurabler Strecken[110] zum Ende des Ordens bei. Durch die konsequente Anwendung mathematischer Schlüsse kamen die Pythagoräer zur Grundidee ihrer eigenen Zahlenmystik in Widerspruch - der Behauptung, daß die Welt ausschließlich auf den einfachen Verhältnissen ganzer Zahlen aufgebaut sei.[111]

1.3.2.3 Die athenische Periode

Im fünften Jahrhundert wurde Athen zum politischen und kulturellen Zentrum Griechenlands und blieb es, bis der mazedonische König Philip im Jahr 338 v. Chr. die Stadt eroberte. In dieser Periode wirkten Bildhauer wie Praxiteles, Schriftsteller wie Aristophanes, Sophokles und Euripides und die großen Philosophen Sokrates und Platon. Aber auch die Mathematik entwickelte sich in dieser Zeit deutlich weiter.[112] Die athenische Mathematik sah sich vor allem mit dem Problem der Irrationalität konfrontiert, das durch die Pythagoräer aufgeworfen worden war: „Es existieren zueinander inkommensurable Strecken, man kann sie konstruieren. Aber es gibt keine natürliche Zahl und kein Verhältnis von Zahlen, das ein arithmetisches Äquivalent des geometrischen Objekts sein könnte [...]."[113] Seit der Zeit der Pythagoräer konnten noch an weiteren Strecken Inkommensurabilitäten gezeigt werden, insbesondere solche, die wir heute als Quadrat- und Kubikwurzeln bezeichnen würden. Mathematiker wie Theodoros von Kyrene und Theaitetos versuchten dieses Problem - das ja an geometrischen Konstruktionen entdeckt worden war - mit ebenfalls geometrischen Mitteln in den Griff zu bekommen. Sie entwickelten etwas, was man mit dem dänischen Mathematikhistoriker Zeuthen treffend als „geometrische Algebra" bezeichnen könnte. Durch die

---

[107] Meschkowski 1990: S. 2
[108] vgl. Wußing 1989: S. 48f
[109] Wußing 1989: S. 49
[110] Zwei Strecken sind inkommensurabel, wenn es keine Einheitstrecke gibt, von der beide Strecken ganzzahlige Vielfache darstellen. Vermutlich wurden inkommensurable Strecken zunächst von dem Pythagoräer Hippasos von Metapontum anhand des gleichseitigen Fünfecks und seiner Diagonalen nachgewiesen. (vgl. Wußing 1989: S. 52f) Laut Meschkowski ist bei dem Antiken Schriftsteller Jamblichos von Chalkis (ca. 283 - 330 n. Chr.) über Hippasos folgendes zu lesen: „Ferner habe er 'als erster das Wesen der Meßbarkeit und der Unmeßbarkeit an Unwürdige verraten'. Deshalb sei er nicht nur aus dem pythagoräischen Bunde ausgestoßen worden, sondern ihm sei auch ein Grab bereitet worden wie einem, der gänzlich aus dem Kreise seiner früheren Gefährten verschwinden soll [...]." (Meschkowski 1990: S. 7)
[111] vgl. Wußing 1989: S. 52f
[112] vgl. Wußing 1989: S. 53f
[113] Wußing 1989: S. 56

Methode der ‘Flächenanlegung’ und andere geometrische Konstruktionen, konnten selbst Irrationalitäten dargestellt werden, die wir heute als verschachtelte Wurzelterme schreiben würden.[114] Einen anderen Weg wählte Eudoxos von Knidos. Bisher war der Begriff der Proportion an die Voraussetzung gebunden gewesen, daß sich die im Verhältnis stehenden Zahlen auf ein gemeinsames Maß zurückführen ließen. Eudoxos gelang es, eine neue Definition der Proportion zu entwickeln, die die Kommensurabilität der beteiligten Größen nicht mehr voraussetzte, mit deren Hilfe aber nach wie vor alle bekannten Sätze über Proportionen bewiesen werden konnten. Außerdem entwickelte er, bei dem Versuch krummlinig begrenzte Figuren durch ein- bzw. umbeschriebene Vielecke anzunähern, erste Ansätze einer Analysis. Bis zu einem wirklich exakten Begriff der irrationalen Zahl drang jedoch keiner dieser griechischen Mathematiker vor.[115]

Platon werden nur wenige konkrete Einzelergebnisse auf dem Gebiet der Mathematik zugeschrieben, er hat aber mit seiner Philosophie die Sichtweise damaliger und späterer Mathematiker entscheidend mitgeprägt. „Platons Bekanntschaft mit der Mathematik rührte aus der Zeit seines Aufenthaltes bei Archytas her. Seitdem betrachtete Platon die Mathematik als das Beispiel einer Wissenschaft, die ihre Ergebnisse durch bloßes Denken finden könne. Diese philosophische Grundhaltung bedeutet einerseits eine Verstärkung der methodischen Grundlage der Mathematik, die auf Definitionen und Voraussetzungen aufbauend deduktiv ihre Beweise führt. Sie bedeutet andererseits die Verstärkung des philosophischen objektiven Idealismus.“[116] Nach Platons Auffassung erkennt Wahrnehmung „nichts Dauerhaftes, gibt also nicht Gewißheit, sondern nur täuschende Meinung [...].“[117] Nur durch richtig gebildete Begriffe kann man zu wirklichem Wissen gelangen. Genau wie die Wahrnehmung ein Objekt hat, benötigen auch die Begriffe ein Objekt, das aber nicht mit dem Objekt der Wahrnehmung identisch sein kann. Diese Objekte der Begriffe sind die Ideen. Die Objekte unserer Wahrnehmung sind nur unvollkommene Abbilder der vollkommenen Ideen.[118] „Bei der Idee ‘Dreieck’ z.B. gilt der Satz über die Winkelsumme wirklich, bei jedem aufgezeichneten Dreieck aber, dem schlechten Abklatsch der Idee, wird die Nachprüfung Abweichungen ergeben.“[119] Luciano De Crescenzo verdeutlicht am Beispiel eines Huhnes, warum Platons Ideenlehre nicht nur eine logische, sondern auch eine metaphysische Theorie darstellt. „Wenn sich mir beim Anblick eines Huhns der Gedanke aufdrängt: ‘Dies ist ein Huhn’, so habe ich dabei folgende Überlegung angestellt: ‘Das Tier, das ich sehe, hat etwas gemeinsam mit allen Hühnern, also muß es ein Huhn sein.’ Wenn ich dagegen behaupte, daß alle Hühner der Welt die Eigenschaft haben, einem idealen Huhn zu gleichen, das einer übersinnlichen Welt entstammt, dann habe ich ein metaphysisches Konzept ausgesprochen. [...] Dieser Sprung von der logischen zur metaphysischen Theorie ist das neue an Platon, das ihn von den Philosophen vor ihm unterscheidet. Während wir mit der Logik nur das Konzept des Universalen aufstellen kön-

[114] vgl. Wußing 1989: S. 56ff
[115] vgl. Wußing 1989: S. 59f
[116] Wußing 1989: S. 54
[117] Schischkoff 1961: S. 449
[118] vgl. Schischkoff 1961: S. 449
[119] Wußing 1989: S. 54f

nen, haben wir es bei der Ideenlehre zum ersten Mal in der Philosophiegeschichte mit etwas zu tun, das außerhalb des Universalen liegt.“[120] Im Laufe der Mathematikgeschichte gab es zahlreiche Mathematiker, die Idealisten im Sinne Platons waren, indem sie annahmen, die mathematischen Gegenstände beständen, unabhängig vom Menschen, in einem metaphysischen Reich der Ideen und die Tätigkeit der Mathematiker bestünde darin, einige dieser Ideen nach und nach zu entdecken.[121] Platon selbst, wie auch die meisten seiner geistigen Nachfolger, sprach einer „reinen Mathematik“ das Wort, die dem metaphysischen Erkenntnisstreben dient und sah Mathematik, die auf die Anwendung hin ausgerichtet war, als minderwertig an.[122]

1.3.2.4 Die hellenistisch / alexandrinische Periode

Im Jahr 338 v. Chr. eroberte der mazedonische König Philipp Athen. 336 v. Chr. übernahm sein Sohn Alexander die Herrschaft und begann sein Weltreich zu errichten, das Mazedonien, Griechenland, Klein- und Mittelasien, Süd- und Westeuropa, Nordafrika und Teile Indiens umfassen sollte. In diesem Umfeld bildete sich die Kultur und Wissenschaft des Hellenismus heraus.[123] „Sie entstand durch Verschmelzung und Durchdringung der kulturell-wissenschaftlichen Ergebnisse der Griechen (d.h. der Hellenen) mit den verschiedenen Kulturen der Völker jenes großen Territoriums [...].“[124] Im Rahmen seiner Eroberungen gründete Alexander zahlreiche Städte; in einer davon, Alexandria in Ägypten, entstand ca. 300 v. Chr. das sogenannte Museion. „Es handelte sich hierbei um das erste staatlich gegründete und unterhaltene Forschungs- und Lehrzentrum überhaupt, mit Hörsälen, Arbeits- und Speiseräumen, mit einer dazugehörigen ganz außergewöhnlichen Bibliothek von ca. 400000 Papyrusrollen (die in späteren kriegerischen Auseinandersetzungen mit den Römern vernichtet wurden), mit Sternwarte, botanischen und zoologischen Gärten.“[125] Fast alle großen Wissenschaftler der hellenistischen Periode standen in Kontakt mit dem Museion, das bis ungefähr 150 n. Chr. Bestand hatte.

Ein mathematisches Standardwerk der hellenistischen Periode, das bis in die Neuzeit hinein seine Bedeutung behielt und zu Unterrichtszwecken verwendet wurde, waren die „Elemente“ des Euklid. Die „Elemente“ sind in über 1700 Ausgaben erschienen und nach der Bibel das am weitesten verbreitete Buch der Welt. Euklid hat darin fast das gesamte mathematische Wissen der damaligen Zeit zusammengestellt und durch Beweise gesichert - allerdings ohne jeden Anwendungsbezug. Als wollte sich das Leben dafür rächen, ist uns von Euklid außer seinen Büchern auch nichts geblieben - seine Lebensgeschichte liegt bis auf einige Anekdoten im Dunkeln. Auch diese zeigen, daß Euklids Mathematik auf reine Erkenntnis und nicht auf praktische Anwendung hin ausgerichtet war. [126] „Da wird von einem reichen Studenten erzählt, der nach dem ers-

[120] Crescenzo 1990: S. 99f
[121] Ernest 1991: S. 29
[122] vgl. Wußing 1989: S. 55
[123] vgl. Wußing 1989: S. 54 und 64
[124] Wußing 1989: S. 64
[125] Wußing 1989: S. 64f
[126] vgl. Wußing 1989: S. 65ff und Kropp 1994: S. 31f

ten Unterricht den Meister gefragt habe, was man denn mit der Mathematik verdienen könne. Euklid forderte seinen Diener auf, dem Schüler ein paar Groschen zu geben, da er aus der Mathematik offenbar materiellen Gewinn erwarte.“[127] Auf Grund der Darstellungsweise, die Euklid in seinen Elementen wählt, gilt er als Begründer der Axiomatik. Er beginnt mit Definitionen, Postulaten und Axiomen. „Die Definitionen der Grundelemente der Geometrie - Punkt, Linie, Strecke, Fläche - sind anschaulicher, beschreibender Art.“[128] Dann folgen fünf geometrische Postulate und schließlich neun logische Axiome, wobei Postulate und Axiome heute nicht mehr unterschieden werden. Daraus werden nun alle Sätze, die Euklid aufstellt, zum Teil mit Hilfe bereits bewiesener anderer Sätze, ohne weiteren Rückgriff auf die Anschauung, logisch deduziert.[129]

Ein Zeitgenosse des Euklid war Archimedes. Wie Euklid mit seinen Elementen, so hat Archimedes mit seinen Forschungen das abendländische Denken mitgeprägt. Er beschäftigte sich mit Mathematik, Astronomie, Hydrostatik, Mechanik und Technik.[130] Eine Aufzählung seiner uns erhaltenen Werke gibt einen Einblick in die Vielfalt seiner Forschungen: „Über das Gleichgewicht ebener Flächen - Die Quadratur der Parabel - Die Methodenlehre - Über Kugel und Zylinder - Über Spiralen - Über Konoide und Sphäroide - Über schwimmende Körper - Die Kreisrechnung - Der Sandrechner.“[131] Dabei war, so weit sich heute sagen läßt, Archimedes Einstellung und Methodik eine ganz andere als die des Euklid (über Euklids Einstellung läßt sich nur über die Darstellungsform in seinen Büchern schlußfolgern). Für Euklid spielte wahrscheinlich der Anwendungsbezug eine untergeordnete Rolle, für Archimedes machte er, nach eigenen Aussagen, seine enormen Leistungen auf mathematischem Gebiet erst möglich. „Archimedes hat durch mechanisch-physikalische Überlegungen und Analogien den Inhalt der Sätze gefunden und dann erst den exakten mathematischen Beweis ausgearbeitet.“[132] Archimedes schreibt selbst: „Ich bin ... überzeugt, daß die Methode nicht weniger nützlich ist zum Beweis der Theoreme selbst. Denn Einiges von dem, was mir auf ‘mechanische’ Weise klar wurde, wurde später auf geometrische Art bewiesen, weil die Betrachtungsweise dieser (‘mechanischen’) Art der (strengen) Beweiskraft entbehrt. Denn es ist leichter, den Beweis zustande zu bringen, wenn man schon vorgreifend durch die ‘mechanische’ Weise einen Begriff von der Sache gewonnen hat, als ohne eine derartige Vorkenntnis. Deshalb wird man einen nicht geringen Verdienstteil an der Entdeckung jener Theoreme, für die Eudoxos zuerst den Beweis fand - über Kegel und Pyramiden, daß der Kegel der 3. Teil des Zylinders und die Pyramide der 3. Teil des Prismas mit der selben Basis und Höhe ist -, dem Demokritos zubilligen müssen, der die Sätze über diese Figuren aussprach, wenn auch ohne Beweis.“[133]

Ebenso wie Archimedes widmete sich einige Jahrhunderte später auch Heron von Ale-

[127] Meschkowski 1990: S. 17
[128] Wußing 1989: S. 66
[129] vgl. Wußing 1989: S. 66ff und Kropp 1994: S. 32
[130] vgl. Wußing 1989: S. 68
[131] Kropp 1994: S. 37
[132] Wußing 1989: S. 69
[133] Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg; München. S. 56. Z.n. Wußing 1989: S. 69

xandria vielen praktischen Belangen. Er beschäftigte sich mit der Konstruktion von Vermessungsinstrumenten, einfachen Maschinen, pneumatisch angetriebenen Automaten und mit Geschützkunde. Seine mathematischen Schriften, die zum Teil Probleme aus seiner „Ingenieurstätigkeit" aufgriffen - so führte ihn die Kaliberberechnung eines Geschützes zur Behandlung von Gleichungen dritten Grades - weisen eine strenge, auf Definitionen, Sätzen und Beweisen beruhende Darstellungsweise auf. Bekannt ist auch seine Methode zur näherungsweisen Bestimmung von Wurzeln.[134] Beeindruckend sind Herons Gedanken über das Wesen der Mathematik. Er stimmt der platonischen Auffassung zu, wenn es um die Frage geht, wie Mathematik als Wissenschaft betrieben werden sollte: "Damit wir nicht gegen die Regeln verstoßen, ist es schicklich, die Definition der Geometrie anzugeben. Die Geometrie ist also die Wissenschaft von Figuren und Größen und ihren Veränderungen, und ihr Zweck ist, hiervon zu handeln; die Methode aber ihrer Darstellung ist synthetisch; sie fängt nämlich mit dem Punkte an, der ohne Ausdehnung ist, und erreicht über Linie und Fläche den Körper. Ihr Nutzen dient geradezu der Philosophie; das ist ja auch die Meinung des göttlichen Platon, wo er sagt: ob diese Lehre schwer oder leicht ist, durch sie geht der Weg."[135] Bei der Frage nach dem Ursprung der Mathematik nimmt er aber einen, der platonischen Ideenlehre ganz entgegengesetzten Standpunkt ein: „Die Geometrie hat ihre Darstellung durch Abstraktion aufgebaut; sie nimmt nämlich den physischen Körper, der drei Dimensionen hat und Stofflichkeit, und durch Entfernung seiner Stofflichkeit hat sie den mathematischen Körper gebildet, der solide ist, und durch Abstraktion hat sie den Punkt erreicht."[136] Danach führt er noch an, daß die Geometrie von den Ägyptern erfunden wurde, weil das Nilhochwasser die jährliche Neuvermessung der Felder notwendig machte.[137] Damit nimmt Heron einen empirizistischen Standpunkt zum Wesen der Mathematik ein, den er mit vielen Mathematikern teilt.[138] Während nach Platons Auffassung die mathematischen Ideen schon immer existieren und vom Menschen lediglich - mitunter mit Umweg über ihre unvollkommenen materiellen Abbilder - entdeckt werden, steht für Heron die materielle Welt am Anfang, aus der der Mensch durch Abstraktion die mathematischen Ideen entwickelt.

Es wirkten in dieser fruchtbaren Periode noch zahlreiche weitere Mathematiker, die ich hier nur zum Teil anführen kann. Appolonios von Perge, der eine achtbändige Abhandlung über Kegelschnitte verfaßte und ein mathematisches Modell entwickelte, das es ermöglichte Platons fehlerhafte Auffassung, daß sich die Planeten auf Kreisbahnen bewegten, mit den tatsächlich beobachteten Planetenbewegungen in Einklang zu bringen. Auch Ptolemaios, nach dem das gleichnamige Weltbild benannt ist, bei dem die Erde im Mittelpunkt gedacht wird, arbeitete über die Planetenbewegungen. In diesem Zusammenhang beschäftigt er sich mit ebener und sphärischer Trigonometrie, sowie

[134] vgl. Wußing 1989: S. 73f
[135] Heron von Alexandria: Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Griechisch-deutsch herausgegeben von W. Schmidt, L. Nix, H. Schöne, J. L. Heiberg. 5 Bde., Leipzig 1899-1914. S. 173. Z.n. Wußing 1989: S. 75.
[136] Heron von Alexandria: Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Griechisch-deutsch herausgegeben von W. Schmidt, L. Nix, H. Schöne, J. L. Heiberg. 5 Bde., Leipzig 1899-1914. S. 175. Z.n. Wußing 1989: S. 75.
[137] vgl. Wußing 1989: S. 75
[138] vgl. Ernest 1991: S. 34

mit der stereographischen Projektion der Kugel auf die Ebene.[139] Einer der letzten herausragenden Mathematiker der hellenistischen Periode war Diophantos von Alexandria. Einerseits stand er in der Tradition der vorgriechischen, algorithmischen Mathematik. Dies kann man daran erkennen, daß es sich bei seinem wichtigsten Werk, einem dreizehnbändigen Lehrbuch der Arithmetik, um eine vom Einfachen zum Schwierigen fortschreitende Aufgabensammlung handelt und daß sich bei einigen Aufgaben starke Ähnlichkeiten zu Aufgaben aus mesopotamischen Texten zeigen. Andererseits war er sehr innovativ; er entwickelte eine ausgefeilte Gleichungslehre die noch im 17. Jahrhundert wichtige Anstöße bei der Entwicklung der modernen Algebra und Arithmetik geliefert hat.[140]

1.3.2.5 Die Periode des Niedergangs

Nach und nach begann der Stern des alexandrinischen Reiches zu sinken, gleichzeitig begann sich von Italien ausgehend ein neues Weltreich auszubreiten, wobei es sich auch weite Teile des alexandrinischen Reiches einverleibte. Ab ca. 30 v. Chr. geriet Ägypten und damit auch Alexandria unter römische Herrschaft. Als die Unruhen im römischen Reich im ersten nachchristlichen Jahrhundert immer größer wurden, nahmen die wissenschaftlichen Leistungen immer mehr ab. Anstatt eigenständige Arbeiten zu erstellen, wurde es üblich, die Werke früherer Autoren zu kommentieren.[141] „Die Mathematikschule zu Alexandria erlosch 415 mit der Ermordung der Mathematikerin Hypatia während der Heidenverfolgung durch fanatische Christen. Die Akademie in Athen wurde 529 durch den christlichen oströmischen Kaiser Justinian als Stätte ‘heidnischer und verderbter Lehren’ geschlossen. Nach dem Zusammenbruch des römischen Weltreiches finden sich im weströmischen Teil nur relativ bescheidene mathematische Kenntnisse, ein wenig Feldmeßkunst, elementare Geometrie, Bruchrechnung und der Computus, d.i. die Berechnung der beweglichen kirchlichen Feiertage.“[142] Aber schon zuvor hatte bei den pragmatisch eingestellten Römern nur die Form von Mathematik gesellschaftliche Unterstützung gefunden, die sich im Messen und Rechnen praktisch anwenden ließ.[143]

Einer der letzten Mathematiker der Antike, die nicht nur kommentierten, sondern auch eigene Leistungen erbrachten, war Pappos von Alexandria, der auf dem Gebiet der projektiven Geometrie arbeitete. Danach folgten Kommentatoren wie Eudemos aus Rhodos, Theon aus Alexandria, Proklos aus Athen, Eutokios aus Askalon, Simplikos und andere, die für uns deswegen bedeutsam sind, weil ihre Kommentare oft die einzigen Quellen sind, aus denen wir Schlüsse über verlorengegangene Werke der griechischen Mathematik ziehen können.[144]

---

[139] vgl. Wußing 1989: S. 71ff
[140] vgl. Wußing 1989: S. 75f und Kropp 1994: S. 48f
[141] vgl. Wußing 1989: S. 64 u. 77
[142] Wußing 1997: S. 22
[143] vgl. Beck 1979: S. 86
[144] vgl. Kropp 1994: S. 49f

1.3.2.6 Angewandte und „reine“ Mathematik bei den Griechen

War die algorithmische Mathematik immer direkt an die Anwendung gebunden, so trat, wie wir gesehen haben, für einige der griechischen Mathematiker immer mehr das Streben nach Erkenntnis in den Vordergrund. Ich habe versucht, die griechischen Mathematiker, bei denen mir meine Quellen das erlaubten, in eher *anwendungsorientierte* und eher *an der reinen Erkenntnis orientierte* Mathematiker einzuteilen. Diejenigen Mathematiker, bei denen mir die Zuordnung wahrscheinlich, aber nicht sicher schien, habe ich mit einem Fragezeichen gekennzeichnet. Wie Archimedes schon bemerkte, haben die „reinen“ Mathematiker, bei ihrem Streben nach Erkenntnis nicht bei Null angefangen, sondern auf die Erkenntnisse aus der algorithmischen, also aus der Anwendung kommenden Mathematik aufgebaut und für diese ein philosophisch neues und logisch strenges Fundament entwickelt.

	Anwendungsorientierung überwiegt	**Erkenntnisstreben überwiegt**
Ionische Periode	• Demokritos von Abdera[145]	• Hippokrates von Chios[146] • Pythagoras von Samos und in seiner Nachfolge die Schule der Pythagoräer[147]
Athenische Periode		• Platon[148] • Theodoros von Kyrene ?[149] • Theaitetos ?[150]
Hellenistische Periode	• Archimedes[151] • Appolonios von Perge[152] • Aristarch[153] • Eratosthenes von Kyrene? • Ptolemaios[154] • Heron[155] • Diophantos von Alexandria[156]	• Euklid[157]

Theorien darüber, wie sich zu Beginn der ionischen Periode die axiomatische und am Streben nach Erkenntnis orientierte Mathematik entwickeln konnte, die die griechische Mathematik zunächst dominierte, habe ich weiter oben schon erörtert. Bleibt die Frage, warum in der hellenistischen Periode die Anwendungsorientierung wieder in den Vor-

145 vgl. Wußing 1989: S. 45f
146 vgl. Wußing 1989: S. 46ff
147 Wußing 1989: S. 48ff
148 vgl. Wußing 1989: S. 54f
149 vgl. Wußing 1989: S. 57f
150 vgl. Wußing 1989: S. 57f
151 vgl. Wußing 1989: S. 68f
152 vgl. Wußing 1989: S. 71f
153 vgl. Kropp 1994: S. 45
154 vgl. Wußing 1989: S. 72f
155 vgl. Wußing 1989: S. 73f
156 vgl. Wußing 1989: S. 75f
157 vgl. Wußing 1989: S. 65f

dergrund trat. In der Literatur habe ich dazu keine expliziten Erklärungen gefunden. Meiner Ansicht nach konnte sich die, mit einer ziemlich extremen philosophischen Position verbundene, „reine“ Mathematik, zunächst aufgrund der besonderen Situation, der in sich relativ geschlossenen griechischen Stadtstaaten halten. Mit der Ausbreitung des riesigen Alexanderreiches, nahm der Einfluß der in den eroberten Gebieten vermutlich vorhandenen, eher „praktischen“ philosophischen Anschauungen und der algorithmischen Mathematik, die in Gebieten wie Ägypten oder Mesopotamien stark anwendungsorientiert war, wieder zu.

1.3.2.7 Darstellung der axiomatischen Methode nach Aristoteles

Insgesamt darf die griechische Antike wohl mit recht als eine der fruchtbarsten Perioden der Menschheitsgeschichte bezeichnet werden. Dies läßt sich selbst aus den Bruchstücken des damaligen Wissens schließen, die uns erhalten geblieben sind. Was davon die mathematische Welt am nachhaltigsten beeinflußt hat, sind nicht einzelne mathematische Sätze und Entdeckungen, obgleich diese oft großartig waren - es ist die axiomatische Methode, die zur Entdeckung vieler dieser Sätze führte. Das Verständnis der axiomatischen Methode hat sich allerdings seit der Antike grundlegend verändert. Diese Veränderungen stehen in enger Verbindung mit grundlegenden Problemen der Mathematik, auf die ich später noch zu sprechen kommen werde. Zunächst möchte ich hier kurz das antike Verständnis der axiomatischen Methode darlegen, so wie es uns vor allem durch Aristoteles überliefert wurde:

„Axiomatische Theorie heißt hier ein System von (nicht explizit vereinbarten) Grundbegriffen, (nicht syllogistisch bewiesenen) Grundsätzen und Sätzen, die mit Hilfe der Grundsätze bewiesen sind. Jede Begründung eines Satzes beginnt mit als zweifelsfrei einsichtigen (evidenten) Aussagen, genannt Axiome.“[158]

In diesem im Prinzip einsichtigen System stecken zwei verborgene Probleme:

- *Was wird als Axiom zugelassen?* Aristoteles läßt nur inhaltliche Aussagen als Axiome zu, die unmittelbar einsichtig sind. Das bedeutet, daß es nicht, wie in der modernen Axiomatik möglich war, von frei gewählten Axiomen auszugehen, um zu untersuchen, was sich daraus ergab. Als Axiome wurden nur Sätze akzeptiert, von deren Einsichtigkeit andere zu überzeugen waren.[159]

[158] Volk 1980: S. 14. Hervorhebungen dort.
[159] vgl. Volk 1980: S. 15

- *Was wird als Übergangsregeln von Axiomen zu Sätzen akzeptiert?* Aristoteles läßt hier ausschließlich Syllogismen[160] zu. Soll die axiomatische Theorie vollständig sein, so müssen die syllogistischen Schlußregeln selbst axiomatisch begründet werden. Das bedeutet letztendlich, daß sie auf unmittelbar einsichtige inhaltliche Aussagen zurückgeführt werden müssen.[161]

Trotz dieser Probleme - und immer wieder geführter Diskussionen darüber, ob es so etwas wie für alle unmittelbar einsichtige inhaltliche Aussagen überhaupt gibt[162] - erwies sich die axiomatische Methode als ungeheuer leistungsfähig und dominiert in einer modernen Version nach wie vor die mathematische Wissenschaft. Martin Wagenschein hat das Besondere und Faszinierende dieser Methode auf den Punkt gebracht: "Daß Seltsames aus Selbstverständlichem ohne Rest verstanden werden kann (und sogar vieles Seltsame aus demselben Bestand von wenigen Selbstverständlichkeiten), diese griechische Einsicht ist eine Entdeckung."[163] Damit möchte ich die lichten Höhen griechischer Mathematik verlassen und mich in den Untergrund begeben, in dem - zumindest die europäische - Mathematik zu Beginn des Mittelalters verschwand.

1.3.3 Mathematik im Untergrund

Auf den Untergang des weströmischen Reiches um 500 n. Chr. folgten die Wirren der Völkerwanderungen in Europa. Glücklicherweise konnte ein Großteil des mathematischen Wissens der Antike auf verschiedenen Wegen bis in die europäische Renaissance hinein erhalten werden. Der weitaus größte Verdienst kommt dabei den islamischen Ländern zu gute. Ab dem 8. Jahrhundert begann sich auch Europa wirtschaftlich, kulturell und wissenschaftlich wieder zu entwickeln. Karl der Große, der im Jahr 800 zum Kaiser gekrönt wurde, bemühte sich, zur Festigung des Zusammenhalts seines Reiches, um die Bildung der Geistlichen und der höheren Beamten. Mit dem Auseinanderbrechen des Karolinerreiches im 9. Jahrhundert verloren diese Maßnahmen aber ihre Wirkung. Im 12. und 13. Jahrhundert erlebte das mittelalterliche Feudalsystem seine Hochperiode; zu dieser Zeit begann sich das Handwerk in Zünften zu organisieren. Durch den nun vermehrt stattfindenden Fernhandel kam es zu einem wissenschaftlichen und kulturellen Austausch mit den islamischen Ländern. Große Teile der islamischen und der überlieferten antiken Mathematik wurden nun übersetzt und flossen in das mittelalterliche Europa ein. Ab dieser Zeit waren die indisch-arabischen Ziffern in Europa bekannt. Der erstarkende Handel führte aber nicht nur zum interkulturellen Austausch, sondern auch zu einer ständig steigenden Bedeutung des Rechnens.[164] „So verfaßte Leonardo Fibonacci von Pisa als einer der ersten Europäer eine systematische Darstellung des Rechnens mit den indisch-arabischen Ziffern, das er bei seinen Ge-

[160] Die Syllogistik „wurde von Aristoteles begründet. Er stellte alle zulässigen Schlußweisen zusammen, bei denen im Bereich von Aussagen der vier Formen: alle A sind B; einige A sind B; einige A sind nicht B; kein A ist ein B aus jeweils zwei Voraussetzungen auf eine Behauptung geschlossen werden kann [...].“ (Wußing 1989: S. 277)
[161] vgl. Volk 1980: S. 14
[162] vgl. Glasersfeld 1997: S. 56ff
[163] Wagenschein 1975: S. 105
[164] vgl. Wußing 1989: S. 102ff

schäftsreisen in den Orient und nach Nordafrika kennengelernt hatte.“[165] Der Handel führte auch dazu, daß neben Adel, Klerus und Leibeigenen, nach und nach das Bürgertum entstand. Das Bildungsbedürfnis dieser neuen Gesellschaftsschicht führte dazu, daß wissenschaftliche Erkenntnisse nicht mehr allein im Kloster weitergegeben wurden. In Paris (ca. 1160), Bologna (ca. 1160) und Oxford (ca. 1167) entstanden die ersten Universitäten, denen rasch weitere in ganz Europa folgten. Diese Lehranstalten bedurften der Anerkennung durch den Papst und waren somit auch an die kirchliche Lehrmeinung gebunden.[166] Das Studium dort sah nach Wußing ungefähr so aus: „Nach einer Immatrikulation im Alter von 10 bis 12 Jahren absolvierte der Student zunächst das Trivium (Dreifach): Grammatik, Rhetorik, Dialektik und dann das Quadrivium (Vierfach): Arithmetik, Geometrie, Astronomie, Musik. Doch blieb das Niveau der mathematischen Ausbildung bescheiden: Elementares Rechnen der vier Rechenarten mit ganzen positiven Zahlen, in seltenen Fällen Bruchrechnung, elementare ebene und räumliche Geometrie und sog. Computus, die Berechnung der beweglichen kirchlichen Feiertage.“[167] Neben Fibonacci taten sich während dieser Periode besonders der Oxforder Magister Thomas Bradwardine, der sich mit der Stetigkeit sich ändernder Größen und Arten des Unendlichen beschäftigte und Nicolaus Oresmus, der seine Überlegungen fortführte, hervor.[168]

1.3.4 Die Wiedergeburt der Mathematik

1.3.4.1 Die Umstände der Geburt

Bei der Beschäftigung mit der Entwicklung der axiomatischen Mathematik in Griechenland tauchte schon einmal die Frage auf: Warum gerade zu dieser Zeit, warum an diesem Ort - wo doch andere Kulturen schon viel länger und effektiver Mathematik getrieben hatten als die damaligen Griechen. Ganz parallel läßt sich zu Beginn der Renaissance in Europa fragen: „warum es gerade in Europa seit dem 15./16. Jh. zur Herausbildung des modernen Typs der Naturwissenschaften - Stichworte: Galilei, Newton - kam mit seinen weitreichenden sozialen und philosophischen Folgen, nicht aber etwa in China oder im Islam, obwohl dort doch ähnliche oder teilweise sogar noch bessere Voraussetzungen, überlegene wissenschaftliche Kenntnisse bestanden hätten.“[169] Auch hier lassen sich wieder verschiedenen Gründe finden, die vermutlich zusammenkommen mußten, um diese Entwicklung möglich zu machen. Ich versuche hier einige davon zusammenzustellen:

[165] Wußing 1989: S. 105
[166] vgl. Wußing 1997: S. 40f
[167] Wußing 1997: S. 40
[168] Wußing 1989: S. 107
[169] Wußing 1997: S. 44

- Die Städte mit dem dort beheimateten Bürgertum gewannen immer mehr an Bedeutung.[170]
- „Mit dem Übergang von der Natural- zur Geldwirtschaft und der sprunghaften Erhöhung des Geldumlaufes wurde eine Vielzahl von Problemen aufgeworfen: Buchhaltung, Zahlenschreibweise, Umrechnung verschiedenartigster Währungs-, Gewichts- und Maßeinheiten ineinander, Zins- und Zinseszinsrechnung, Erweiterung des Zahlenbereiches, Ausbildung von zweckmäßigen Rechenverfahren [...].“[171]
- „Es erfolgt eine Ablösung des kulturellen Lebens von der christlichen Überlieferung des Mittelalters. Die Völker der Antike, insbesondere die Griechen, werden nicht mehr als unerlöste Heiden angesehen, sondern als Träger einer eigenständigen Kultur von hohem geistigen Werte.“[172]
- „Die Schiffahrt, die sich von den Küsten lösen und die hohe See erreichen konnte, erforderte neue Kenntnisse und Fertigkeiten der Navigation und im Schiffsbau; hier ergaben sich Forderungen an Trigonometrie und die Bewältigung hydrostatischer, mathematisch-physikalischer Probleme.“[173]
- Das Problem der Ortsbestimmung auf hoher See war auch einer der Gründe dafür, daß die Beschäftigung mit Astronomie zunahm.[174]
- „Das aufkommende und sich rasch entwickelnde Geschützwesen [...] stellte die Geschützmeister vor eine Reihe ballistischer Fragen.“[175]
- Die „Konstruktion von Festungen erforderte bei zunehmender Durchschlagskraft der Geschosse auch den Bau in die Tiefe und förderte damit Ansatzpunkte zur darstellenden Geometrie, d.h. der Kunst, Dreidimensionales in einer Zeichenebene darzustellen.“[176]
- „Die Berücksichtigung der Perspektive auf Gemälden, die neben dem Streben um realistische Darstellung zu den Errungenschaften der Renaissance-Kunst gehört, führte zur Entdeckung einiger Grundelemente der darstellenden Geometrie wie Fluchtpunkt und Fluchtgerade.“[177]

Interessant sind die Parallelen, die sich hier zur Zeit des Entwicklungsschubes im antiken Griechenland ziehen lassen. Zum einen spielten auch damals die Stadtstaaten und das, damals allerdings durch die Haltung von Sklaven ermöglichte, Bürgertum eine große Rolle. Zum anderen fand im antiken Griechenland wie in der Renaissance ein Wandel in der Wirtschaftsform statt. Bei den Griechen setzte sich der Tauschwert der Waren nach und nach gegenüber dem Gebrauchswert der Waren durch; in der Renaissance löste der Geldhandel immer mehr den Warenhandel ab. Abzuwarten bleibt Angesichts dieser Parallelität zwischen Handelsformen und kultureller und wissenschaftlicher Entwicklung, ob die augenblicklich stattfindende Entwicklung hin zum bargeldlosen Zahlungsverkehr von ähnlich einschneidenden Veränderungen in unserer Denk-

[170] vgl. Wußing 1989: S. 110
[171] Wußing 1989: S. 112
[172] Kropp 1994: S. 61
[173] Wußing 1989: S. 114. Vgl. auch Führer 1986: S. 42 ff
[174] vgl. Führer 1986: S. 43
[175] Wußing 1989: S. 114. Vgl. auch Führer 1986: S. 45f
[176] Wußing 1989: S. 115. Vgl. auch Führer 1986: S. 42
[177] Wußing 1989: S. 116

weise begleitet sein wird, wie sie im antiken Griechenland und der Renaissance stattfanden.

Noch ein weiterer Punkt an der obigen Auflistung ist bemerkenswert: Vergleicht man den Bedarf der damaligen Zeit an mathematischen Kenntnissen mit dem was heute, ungefähr 400 Jahre später in der Schule ungefähr gelernt wird, so läßt sich eine weitgehende Übereinstimmung feststellen.[178] In Verbindung damit wird sich im weiteren die Frage noch dringlich stellen, ob unsere Lehrpläne im Fach Mathematik vielleicht auf die Bedürfnisse des ausgehenden Mittelalters zugeschnitten sind und heute nicht ganz andere Inhalte gefordert und zeitgemäß wären. Betrachten wir zunächst jedoch die Entwicklung in der Renaissance noch ein wenig näher.

1.3.4.2 Vom Abakus zur Algebra

Im Rahmen des sich ausbreitenden Geldhandels entstand in den Städten ein neuer Beruf, der des sogenannten Rechenmeisters. Die Aufgabe der Rechenmeister war es, die Rechenarbeiten auszuführen, die im Rahmen der Stadtverwaltung anfielen. Außerdem unterhielten sie oft Rechenschulen, in denen sie gegen Bezahlung Rechnen in Zusammenhang mit Problemen des täglichen Lebens, besonders des Handels lehrten.[179] „Dem mathematischen Inhalt nach handelte es sich bei dem kaufmännischen Rechnen um Umrechnungen der verschiedensten Währungen, Längen- und Raummaße ineinander, um einfachen und mehrfachen Dreisatz, um Zins- und Zinseszinsrechnung, um die Kunst der doppelten Buchführung.“[180] Im Rahmen ihrer Tätigkeit gaben die Rechenmeister auch Rechenbücher heraus, die durch den nun verfügbaren Buchdruck rasch weite Verbreitung fanden. Dabei wurden in der Regel zwei verschiedene Rechenmethoden behandelt: zum einen das zu dieser Zeit traditionelle Rechnen mit Abakus oder Rechenbrett zum anderen das erst aufkommende und durch die Rechenmeister populär gemachte Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern. Sehr schön ablesen läßt sich das am Titel des 1522 von Adam Ries veröffentlichten Rechenbuches „Rechnung auff der Linien und Federn“ - „Rechnung auff der Linien“ bezieht sich dabei auf das Abakus-Rechnen; „Federn“, das Rechnen mit der Feder auf das schriftliche Rechnen mit den indisch-arabischen Ziffern. Es dauerte allerdings noch eine ganze Zeit, bis sich diese neue Rechenmethode überall durchsetzen konnte. „Die Rechenmeister führten nach und nach Abkürzungen und Symbole zur Bezeichnung mathematischer Begriffe und Operationen ein. 1496 wurde der Multiplikationspunkt verwendet, 1481 erstmals die Zeichen + und - für die beiden Grundrechenarten, 1525 erschien zum erstenmal der Wurzelhaken im Druck und 1557 das Gleichheitszeichen =.“[181]

[178] vgl. z.B. Ministerium 1994
[179] vgl. Wußing 1989: S. 120 und Windmann 1986: S. 26f
[180] Wußing 1989: S. 120
[181] Wußing 1997: S. 45

Zahlreiche mathematische Entdeckungen folgten. Der Niederländer Stevin führte 1585 die Dezimalbruchschreibweise ein.[182] „Die Geschichte des Logarithmierens beginnt mit dem Vergleich zwischen der arithmetischen und der geometrischen Reihe, wobei die arithmetische Reihe sozusagen die Logarithmen, die geometrische die Numerie darstellt.“[183] Zu Beginn des 17. Jahrhunderts wurden die ersten logarithmischen Rechentafeln veröffentlicht, die vor allem das Berechnen von trigonometrischen Funktionen vereinfachen sollten. Anknüpfend an Ergebnisse aus dem arabischen Raum und der Antike, waren trigonometrische Tafeln bereits gegen Ende des 13. Jh. in Spanien erstellt worden. Im 15. Jh. wurden diese Tafeln überarbeitet, außerdem wurden die bekannten trigonometrischen Sätze geordnet und die Darstellung systematisiert.[184]

Aufbauend auf der Tätigkeit der Rechenmeister entstand nach und nach die sogenannte „Coß“, eine Vorstufe der algebraischen Mathematik, bei der mathematische Symbole und Kunstwörter benutzt wurden.[185] „Das Wort ‘Coß’ leitet sich her von der Bezeichnung für ‘Ding’, ‘Sache’ für die gesuchte Größe, die aus Gleichungen zu bestimmen war und die anfangs verbal, eben als ‘Ding’ notiert wurde. Lateinisch hieß dies res, italienisch cosa, deutsch Coß.“[186] Besonders in Italien setzte eine rege Beschäftigung mit der „Gleichungslehre“ ein und es gelang, Lösungsverfahren für verschiedene Gleichungen dritten und vierten Grades zu finden. War ursprünglich die Arbeit der Rechenmeister sehr stark anwendungsorientiert gewesen, so trat bei der Coß, wie sie nun mehr und mehr auch an Universitäten betrieben wurde, der Anwendungsaspekt in den Hintergrund. Einen Höhepunkt fand die frühe Algebra in der Arbeit von Francois Viète (lat. Vieta).[187]

Ich möchte aber auf die vielen Mathematiker der Renaissance, die großes geleistet haben, hier nicht näher eingehen. Wichtiger war mir, die groben Strömungen dieser Periode aufzuzeichnen, die den Boden fruchtbar machten für die folgenden stürmischen Entwicklungen in der Mathematik: die stark anwendungsbezogene Arbeit der Rechenmeister, die über die Coß zur Algebra hinführte und die Fortführung der griechischen Mathematik, nachdem griechische Quellen, in verschiedene Sprachen übersetzt, immer mehr zugänglich wurden.

1.3.5 Mathematik in Bewegung

1.3.5.1 Gesellschaftliche Bewegung

Auf die Renaissance folgte für Europa eine Zeit großer Umwälzungen, die ungefähr von 1620 bis 1795 andauerte. In England und in den Niederlanden finden schon die ersten Revolutionen des Bürgertums gegen absolutistische Herrschaftsstrukturen statt,

[182] vgl. Wußing 1989: S. 123
[183] Wußing 1989: S. 123
[184] vgl. Wußing 1989: S. 116ff u. S. 124
[185] vgl. Wußing 1989: S. 126
[186] Wußing 1989: S. 126
[187] vgl. Wußing 1989: S. 127ff

während sich in Frankreich der Absolutismus mit Ludwig dem XIV. noch zu seiner vollen Blüte entfaltet. Eine kriegerische Auseinandersetzung folgt auf die andere - oft unter dem Vorwand geführt, den rechten Glauben verteidigen zu müssen. Die Kämpfe werden sogar aus Europa hinaus in die Kolonien getragen. „Nationalstaaten" beginnen sich zu bilden. Die größte Umwälzung, die das überkommene Machtgefüge endgültig erschüttert, erfolgt gegen Ende des 18. Jahrhunderts mit der französischen Revolution. Im kulturellen Bereich finden wir die Epoche des Barock, die später von Regenence, Rokoko und Klassizismus abgelöst wird. Die wirtschaftliche Entwicklung ist durch eine zunehmende Verlagerung der Produktion in Manufakturen geprägt.[188]

Auch die Naturwissenschaft erlangt einen neuen gesellschaftlichen Stellenwert. Ihr Nutzen wird mehr und mehr anerkannt, was sie in den Genuß staatlicher Förderung bringt. Aber es geht nicht immer um den praktischen Nutzen, es wird für Herrscher und Regierungen auch zu einer Prestigefrage, namhafte Wissenschaftler zu unterstützen. Durch diese Förderung ist es den Wissenschaftlern zum einen möglich, die Probleme anzupacken, die den Herrschenden am Herzen liegen, wie Balistik, Navigation, Schiffsbau, Kartographie, Festungsbau und die Verbesserung technischer Gerätschaften; zum anderen haben sie auch die Gelegenheit, die innerwissenschaftliche Entwicklung, die nicht direkt auf die Anwendung bezogen ist, voranzutreiben. Im Vergleich zum Mittelalter und der Renaissance ändert sich nun auch der Arbeitsstil der Wissenschaftler entscheidend. Hielten sie zuvor ihre Ergebnisse voreinander geheim, so beginnen sie nun zusammenzuarbeiten. Die wissenschaftliche Arbeit verlagert sich mehr und mehr weg von den, noch durch mittelalterliche Strukturen geprägten, Universitäten, hin zu überall in Europa neugegründeten Akademien. Ein reger Austausch über die Grenzen hinweg entsteht und erste wissenschaftliche Zeitschriften werden gegründet.[189]

1.3.5.2 Naturwissenschaftliche Bewegung

So verschieden die Probleme, an denen die Wissenschaftler jener Zeit arbeiteten, sind - ein Großteil davon hängt mit der Beschreibung von Bewegungen zusammen: Galilei untersucht die Fallbewegung und das Pendel; Kepler formuliert Gesetze, die die Planetenbewegung beschreiben; Huygens konstruiert eine Pendeluhr; Newton entwickelt die Gravitationstheorie und arbeitet an den Grundlagen der Mechanik; abgesehen davon wird auf dem Gebiet der Optik und bei der Erforschung des Luftdrucks grundlegendes geleistet.[190]

Das eigentlich Neue an der Physik dieser Zeit sind aber Methode und Zielsetzung. Besonders Galileo Galilei hat hier so bahnbrechendes geleistet, daß er vielen als der B e

[188] vgl. Willer 1990: S. 104ff, Wußing 1989: S. 132f und Wußing 1997: S. 47ff
[189] vgl. Willer 1990: S. 114ff, Wußing 1989: S. 137ff und Wußing 1997: S. 47ff
[190] vgl. Gaebert 1974: S. 80ff; Willer 1990: S. 114f und Wußing 1997: S. 48

gründer der neuzeitlichen Physik gilt. Das Neue an seiner Methode kann in drei Punkten zusammengefaßt werden:

- Im Gegensatz zu seinen Vorgängern in Antike und Renaissance fragte Galilei nicht nach der Ursache der Phänomene, die er beobachtete, sondern beschränkte sich bewußt darauf, die Eigenschaften der Phänomene zu untersuchen.
- Galilei tat den großen Schritt vom konkreten, beobachtbaren Phänomen hin zum allgemeinen, selbst nicht mehr zu beobachtenden, mathematisch formulierten Gesetz, das die beim untersuchten Vorgang meßbaren Größen in einen möglichst einfachen Zusammenhang stellte.
- Er überprüfte die Ergebnisse, zu denen er auf diese Weise gelangt war, durch gezielte Experimente.

Das besondere an Galileis Arbeitsweise war also nicht allein, daß er experimentierte - das hatten schon viele andere vor ihm getan - das besondere war die Einschränkung auf die Beschreibung des beobachteten Phänomens und die Art und Weise, in der er dabei mathematisches und experimentelles Vorgehen miteinander verband.[191]

Mit Galileis neuer Methode verschiebt sich auch die Zielvorstellung der Naturwissenschaft. Lag das Ziel der Naturwissenschaft bisher oftmals in der Anwendung oder in der Suche nach der Ursache der Naturvorgänge[192], so ist bei Galilei „die technische Anwendung nicht mehr das Ziel, sondern nur noch der Anlaß zur physikalischen Erörterung oder Spekulation. In der damit begründeten, neuzeitlichen Tradition der Naturwissenschaften zielt die Physik allein auf den einen Aspekt, das in den Naturvorgängen Meßbare in seinen mathematischen, das aber heißt: in seinen gesetzmäßigen Zusammenhängen zu erkennen, um aufgrund dessen aus vorgegebenen Anfangsbedingungen den weiteren Verlauf solcher Vorgänge vorhersagen zu können. Von der technischen Anwendung solcher Erkenntnisse wird zunächst methodisch abgesehen.“[193]

Die neue Methoden und Zielsetzungn in der Physik, die auf der freiwilligen Einschränkung auf die Beschreibung von Phänomenen beruhten, führten zu überwältigenden Erfolgen. Unter dem Eindruck dieser Erfolge entstand im folgenden das mechanistisch-deterministische Weltbild. Man sah die Welt als eine große Maschine, die man mathematisch immer besser zu beherrschen glaubte.[194] Einen guten Eindruck von dieser Sichtweise gibt das folgende Zitat von Laplace: „Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennte, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegung der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen. Der menschliche Geist bietet in der Vorstellung, die er der Astronomie zu geben verstand, ein schwaches Abbild dieser Intelligenz dar. Seine Entdeckung auf dem Gebiet der Mechanik und Geometrie, verbunden mit der Entdeckung der allgemeinen Gravitation, haben ihn in Stand gesetzt, in demselben analytischen Ausdruck die ver-

[191] vgl. Willer 1990: S. 106ff
[192] vgl. Willer 1990: S. 113f
[193] Willer 1990: S. 114
[194] vgl. Wußing 1997: S. 52 und Schischkoff 1961 S. 369

gangenen und zukünftigen Zustände des Weltsystems zu umfassen.“[195]

1.3.5.3 Mathematische Bewegung

Die Mathematik jener Zeit wurde stark von der Entwicklung in den Naturwissenschaften beeinflußt. Im Mittelpunkt der Entwicklung stand die Erarbeitung von Lösungsmöglichkeiten für das Problem, Bewegungen mathematisch zu beschreiben. In diesem Zusammenhang fand ein Übergang von einer Mathematik der statischen Größen zu einer Mathematik der veränderlichen Größen statt, der sich vor allem in der Entwicklung der analytischen Geometrie, der Infinitesimalrechnung und der Herausbildung des Funktionsbegriffes niederschlug. Außerdem änderte sich in der Mathematik, ähnlich wie in der Naturwissenschaft auch, das methodische Vorgehen. Diese Parallelität der Entwicklung in Mathematik und Naturwissenschaft ist nicht verwunderlich, waren doch fast alle Wissenschaftler jener Zeit Naturwissenschaftler und Mathematiker in einer Person.[196]

Die analytische Geometrie verband Geometrie und Algebra miteinander. Mit ihrer Hilfe wurde es zum einen möglich, geometrische Probleme mit Hilfe algebraischer Methoden zu lösen und zum anderen algebraische Probleme geometrisch zu veranschaulichen.[197] Die Grundzüge der analytischen Geometrie wurden unabhängig voneinander von Fermat und Descartes entwickelt. Dabei konnten sie sich auf die Weiterentwicklung der Algebra in der Renaissance und auf die antike Kegelschnittslehre stützen. In diesem Zusammenhang gewann die Kegelschnittslehre, die lange Zeit der Inbegriff „reiner“ Mathematik bar jeden Anwendungsbezuges gewesen war, eine naturwissenschaftliche Bedeutung. - Man entdeckte, daß mit Hilfe von Kegelschnitten wie Parabel und Ellipse die Bahnkurven bewegter Gegenstände beschrieben werden konnten.[198] Hier läßt sich eine gegenseitige Befruchtung von Mathematik und Naturwissenschaft beobachten, wie sie sich in der Geschichte noch häufiger feststellen läßt. Die naturwissenschaftliche Forschung stößt zum einen neue Entwicklungen in der Mathematik an und kann zum anderen auf innermathematisches Wissen zurückgreifen, das schon lange zuvor entwickelt worden ist, ohne daß dabei an einen möglichen Anwendungsbezug gedacht worden wäre.[199]

Betrachten wir die Arbeit von Descartes und Fermat genauer, so läßt sich feststellen, daß bei Descartes der Schwerpunkt noch darauf lag, algebraische Gleichungen mit Hilfe geometrischer Methoden aufzulösen,[200] wohingegen Fermat schon versuchte, „die Identität eines durch eine algebraische Gleichung definierten geometrischen Ortes mit schon bekannten Kurven nachzuweisen.“[201] Aufbauend auf der Arbeit von Descartes führte Newton einige Zeit später das „cartesische“ Koordinatensystem ein, wobei er

[195] Laplace, P.S. de: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Ed. R. v. Mises. Leipzig 1932. S. 1/2. Z. n. Wußing 1989: S. 190
[196] vgl. Wußing 1997: S. 48ff
[197] vgl. Athen 1974: S. 467
[198] vgl. Wußing 1989: S. 139ff
[199] Zahlreiche weiter Beispiele finden sich bei Barrow 1993: S. 16f
[200] vgl. Wußing 1989: S. 142
[201] Wußing 1989: S. 147

auch negative Koordinaten verwendete. Die uns heute vertraute Form erhielt die analytische Geometrie erst im Laufe des 19. Jahrhunderts.[202] Eine entscheidende Folge der Entwicklung der analytischen Geometrie war der Wandel der mathematischen Vorgehensweise, der durch sie eingeleitet wurde. Bisher hatte sich die Mathematik am streng axiomatischen Vorgehen der griechischen Geometrie orientiert. Mit der analytischen Geometrie fand ein Rückgriff auf algorithmische Verfahrensweisen statt. Diesen fehlte die axiomatische Absicherung und sie konnten vorerst nur über die Richtigkeit der Ergebnisse, die sie lieferten, gerechtfertigt werden. Auf dem Gebiet der entstehenden Infinitesimalrechnung können wir diese Entwicklung ebenfalls beobachten.[203]

Der Entwicklung der Infinitesimalrechnung, der Rechnung mit unendlich kleinen Größen, durch Newton und Leibniz war eine lange Entwicklung vorausgegangen. Bereits in der Antike verwendete Archimedes Verfahren zur Flächenberechnung, die als erste tastende Schritte in diese Richtung angesehen werden können. Erst im 17. Jahrhundert jedoch kam die Entwicklung richtig ins Rollen und zahlreiche Mathematiker jener Zeit wahren daran beteiligt. Wie wurde diese Entwicklung angestoßen? Wußing nennt drei Problemfelder, die die Mathematiker jener Zeit vermutlich motiviert haben:

- Das Problem, Bewegungen mathematisch beschreibbar zu machen.
- Mechanische Probleme, die mit der Flächen- und Volumenberechnung, sowie mit der Bestimmung von Schwerpunkten in Zusammenhang standen.
- Innermathematische Probleme, die durch die Untersuchung von Flächen, Körpern und Kurven aufgeworfen wurden.[204] „In dieser Problemgruppe dominierte das Tangentenproblem, als die Aufgabe, für eine ganz beliebige Kurve in einem ganz beliebigen Punkte die Tangente zu finden.“[205]

Ich möchte hier die Entwicklung nicht im einzelnen nachzeichnen; bemerkenswert scheint mir jedoch die Einstellung, die einige der daran Beteiligten zu ihrer Arbeit hatten. Cavalieri, ein Schüler Galileis, entwickelte eine Geometrie der Indivisiblen und hat sie „im wesentlichen als eine pragmatische Anleitung betrachtet, als eine Methode also, die darum gut und richtig sei, weil sie richtige Ergebnisse liefere.“[206] Auch Fermat, der ein Verfahren zur Extremwertbestimmung entwickelte, kann es nicht begründen, sondern nur durch den Erfolg rechtfertigen. Schließlich entwickelten Newton und Leibniz unabhängig voneinander eine zusammenhängende Methode der Infinitesimalrechnung. Dabei setzte sich Leibniz *Calculus* gegenüber Newtons *Fluxionsrechnung* vor allem auf Grund der praktischeren Schreibweise durch. In der Folge entwickelten zahlreiche Mathematiker die Infinitesimalrechnung weiter. Zusammen mit der Infinitesimalrechnung bildete sich auch ein immer exakter gefaßter Funktionsbegriff und eine Theorie unendlicher Reihen heraus.[207] Seine Anwendung findet der neue Zweig der Mathematik zunächst in der Astronomie, dem Artilleriewesen, der Schiffsbaukunst und in der Fehlerrechnung.[208] Aber der Schritt zur Anwendung ist nicht immer einfach - so

[202] vgl. Wußing 1989: S. 148
[203] vgl. Volk 1980: S. 22
[204] vgl. Wußing 1989: S. 152f
[205] Wußing 1989: S. 153
[206] Wußing 1989: S. 160
[207] Wußing 1989: S. 169ff
[208] Wußing 1989: S. 187f

schreibt Friedrich der Große 1778 an Voltaire: „Die Engländer haben Schiffe mit dem nach Newton vorteilhaftesten Querschnitt gebaut; ihre Admirale aber haben mir versichert, daß diese Schiffe längst nicht so gute Segler seien, wie die nach den Regeln der Erfahrung gebauten. Ich wollte in meinem Garten einen Springbrunnen anlegen; Euler berechnete die Leistung der Räder, die das Wasser in einen Behälter heben sollten, damit es dann, durch Kanäle geleitet, in Sanssouci wieder in die Höhe steige. Mein Hebewerk ist nach mathematischen Berechnungen ausgeführt worden, und doch hat es keinen Tropfen Wasser bis auf fünfzig Schritt vom Behälter heben können."[209]

Wie oben schon am Beispiel von Cavalierie und Fermat erwähnt, wurde auf Grund der großen Erfolge der Infinitesimalrechnung oft auf eine strenge Begründung verzichtet, diese Einstellung läßt sich auch bei anderen Mathematikern zeigen.[210] Dieser Entwicklung gegenüber regte sich im folgenden immer mehr Kritik, z.B. aus dem Kreis der Pariser Akademie.[211] Einer der größten Kritiker der neuen Entwicklungen in der Mathematik war jedoch der englische Philosoph und Bischof George Berkeley,[212] der in seinem 1734 erschienen Buch „The Analyst" fragt, „ob man von Menschen eigentlich sagen kann, sie verfahren nach einer wissenschaftlichen Methode, ohne daß sie den Gegenstand, mit dem sie sich befassen, das Ziel, das sie sich gesteckt haben, und die Methode, nach der sie es verfolgen, klar begreifen."[213] Diese, angesichts der mehr oder weniger verschwommenen Definitionen und Vorstellungen von Begriffen wie reelle Zahl, Grenzwert oder Unendlichkeit durchaus berechtigten Vorwürfe, wurden zusammen mit weiteren innermathematischen Fragen, die sich aus der Infinitesimalrechnung ergeben hatten,[214] zum Auslöser für die Grundlagenforschung in der Mathematik im 19. Jahrhundert.[215]

Natürlich wurde in der gerade besprochenen Periode nicht nur die analytische Geometrie und die Infinitesimalrechnung entwickelt. Auch auf dem Gebiet der Algebra, Arithmetik und Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden Fortschritte erzielt.[216] Diese waren aber weder für den Anwendungsbezug der Mathematik noch für die zukünftige innermathematische Entwicklung so entscheidend, wie das, was sich auf den Gebieten getan hatte, auf die ich mich hier konzentriert habe.

1.3.6 Grundlegende Mathematik

1.3.6.1 Die industrielle Revolution

Noch im 18. Jahrhundert waren die Dampfmaschine und die ersten Werkzeugmaschinen, wie Spinnmaschine, automatischer Webstuhl, Drehbank und Fräsmaschine erfun-

---

[209] z.n. Führer 1986: S. 42
[210] Volk 1980: S. 26 nennt zum Beispiel D'Ambert, Kepler, Leibniz und Euler.
[211] Meschkowski 1990: S. 94
[212] vgl. Volk 1989: S. 26ff und Wußing 1989: S. 188ff
[213] z.n. Volk 1980: S. 28
[214] Mit der Herausbildung des Funktionsbegriffes stellten sich zum Beispiel die Fragen, welche Ausdrücke als Funktion zugelassen werden sollten und ob jede beliebige zeichenbare Kurve als Bild einer Funktion aufzufassen sei. (vgl. Wußing 1989: S. 180f)
[215] vgl. Volk 1980: S. 28f und Wußing 1989: S. 168ff
[216] vgl. Wußing 1997: S. 52

den worden. Ihr zunehmender Einsatz führte zunächst in England und Frankreich, später auch in Deutschland und den USA zur industriellen Revolution. Die technischen und logistischen Probleme, die die neue Art zu produzieren mit sich brachte, stellten Mathematik und Naturwissenschaften vor große Anforderungen. Im Spannungsfeld von Technik und Wissenschaft entstanden die Ingenieurswissenschaften. Um den hohen Bedarf an Ingenieuren zu decken, wurden überall in Europa polytechnische Hochschulen, die eine anwendungsorientierte Ausbildung in Mathematik und Naturwissenschaften anboten, gegründet. Es fanden aber auch zahlreiche Neugründungen von Universitäten mit mathematisch-naturwissenschaftlichem Schwerpunkt statt. In Deutschland spielte dabei Wilhelm von Humboldt eine entscheidende Rolle. Sein bis heute nachwirkendes Bildungsideal und seine Universitätsreform führten zu einer Verflechtung von Forschung und Lehre.[217]

War bisher die Mathematik die Sache einiger weniger gewesen, die sie aus starkem innerem Antrieb und allen Widernissen zum Trotz betrieben hatten, so soll sie nun einer großen Zahl von Ingenieuren möglichst schnell und effektiv gelehrt werden. - Die Mathematik muß daher lehr- und anwendungsfreundlicher werden. Das bedeutet:

- Es muß eine methodische Darstellung des Wissens entwickelt werden, die gleichartige Probleme auf gleiche Weise behandelt, so daß die Lösungsansätze bequem übertragbar und damit wiederholt anwendbar werden.
- Diese methodische Darstellung des Wissens erfordert einen neuen, systematisch aufgebauten Lehrbuchtyp.
- Dazu wiederum werden klare Definition von bislang mehr oder weniger intuitiv gebrauchten Begriffen und eine einigermaßen einheitliche Terminologie benötigt.

Im Rahmen dieser Bemühungen um die Lehrbarkeit der Mathematik wird sie in vielen Ländern zu einem eigenständigen Fach in der Lehrerausbildung.[218]

1.3.6.2 Die Spaltung der Mathematik

Zum Teil auf Grund dieser Bemühungen um die Lehrbarkeit der Mathematik, zum Teil aber auch auf Grund der oben erwähnten innermathematischen Probleme, vor allem im Bereich der Analysis, beginnt sich eine Reihe von Mathematikern der Untersuchung von Methoden und Grundlagen der Mathematik, unabhängig von jedem Anwendungsbezug, zuzuwenden. Die mathematische Grundlagenforschung entsteht. Die sich nun abzeichnende Spezialisierung von Mathematikern auf eine eher anwendungsorientierte und eine eher an den Grundlagen interessierte „reine“ Mathematik, ist zunächst pragmatischer Natur. Angesichts des sich ständig ausweitenden mathematischen Wissens wird diese Art der Arbeitsteilung einfach notwendig, um die Vielzahl der Probleme bewältigen zu können. Allerdings bekommt für die beteiligten Mathematiker die jeweilige Spezialisierung bald eine starke ideologische Bedeutung. Es kommt zu einer regelrechten Spaltung in eine „reine“ und eine anwendungsorientierte Mathematik, deren Protagonisten sich zum Teil heftig befehden.[219]

[217] vgl. Wußing 1989: S. 192ff und Wußing 1997: S. 55ff
[218] vgl. Volk 1980: S. 34f, Wußing 1989: S. 197f und Wußing 1997: S. 57
[219] vgl. Beck 1979: S. 76ff und Volk 1980: S. 28ff

Ein Hauptgrund für die Herausbildung der „reinen“ Mathematik war der Wunsch gewesen, vorhandenes Wissen und vorhandene Methoden abzusichern und besser handhabbar zu machen. Vielleicht spielte auch damals schon der Gedanke eine Rolle, mit Hilfe der Mathematik ein Arsenal potentieller Modelle für zukünftige Anwendungen zu entwickeln.[220] Eine große Anzahl der Mathematiker, die sich auf diesem Gebiet betätigten, entwickelte aber bald ein ganz anderes Selbstverständnis. Sie sahen, in der Tradition von Platon, in dem Streben nach mathematischer Erkenntnis einen eigenständigen Wert, den sie weit über die profane Anwendung stellten. So schreibt der Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi: „Es ist wahr, daß Herr Fourier der Meinung war, daß das Hauptziel der Mathematik im öffentlichen Nutzen und in der Erklärung der Naturvorgänge bestünde; aber ein solcher Philosoph wie er hätte wissen müssen, daß das einzige Ziel der Wissenschaft die Ehre des menschlichen Geistes ist und daß unter diesem Gesichtspunkt ein Problem der Zahlen genauso wertvoll ist wie eine Frage nach dem Bau der Welt.“[221] Andere Mathematiker, z.B. Poincare, betonten den ästhetischen Genuß des Mathematiktreibens.[222] Im folgenden beginnen sich die „reinen“ Mathematiker „zu weigern, ihr Treiben an Zwecksetzungen messen zu lassen. Es ist die Weigerung, Zwecksetzung und Funktionalisierung der mathematischen Wissensbildung zum Gegenstand öffentlicher und verbindlicher Diskussion zu machen. Es ist die Weigerung, Rechenschaft zu geben von Zwecksetzung und Funktionalisierung.“[223] Bis heute gibt es Mathematiker, die ähnliche Positionen vertreten. Besonders deutlich herausgearbeitet findet man sie in G. H. Hardys 1967 erschienenem Buch: „A Mathematician’s Apology“. Dort bezeichnet Hardy wirkliche Mathematiker als kreative Künstler und die wirkliche Mathematik als von der Anwendung unabhängig. Er rechtfertigt die Beschäftigung mit wirklicher Mathematik damit, daß jeder das tun solle, was er am besten könne, fordert also ein Recht auf Selbstverwirklichung unabhängig vom gesellschaftlichen Nutzen ein. Den Nutzen der Mathematik für den Mathematiker sieht er zum einen im ästhetischen Gewinn, zum anderen darin, daß sie ihm angesichts einer schlechten Welt eine Zuflucht biete. Die anwendungsorientierte Mathematik lehnt Hardy ab, weil sie die moderne Kriegsführung ermögliche und dadurch ihre schlechten Auswirkungen die guten überwögen.[224]

Die ideologische Spaltung der Mathematik fand in einer Zeit statt, in der die Bedeutung der Mathematik für die Anwendung größer wurde als je zuvor. Zwar hatte die Naturwissenschaft schon seit Galilei von der Mathematik profitiert, aber erst mit Beginn der Industrialisierung fanden sich wirklich zahlreiche Anwendungsgebiete mit einem breiten „gesellschaftlichen“[225] Nutzen. Die anwendungsorientierte Mathematik wurde hauptsächlich getragen von den vielen Ingenieuren und Naturwissenschaftlern,

---

[220] vgl. Beck 1979: S. 111
[221] C. G. J. Jacobi: Werke Bd. I, S. 454f. (Brief an Legendre vom 2.7.1830). Z.n. nach Volk 1980: S. 31. Dort z.n. Struik, D.: Abriß der Geschichte der Mathematik. Berlin 1967.
[222] vgl. Beck 1979: S. 79
[223] Volk 1980: S. 79
[224] vgl. Beck 1979: S. 81ff
[225] Ich schreibe „gesellschaftlich“ hier in Anführungszeichen, weil es zunächst natürlich nicht die Gesellschaft als Ganzes war, die von der Industrialisierung profitierte, sondern einige Wenige, die ganz furchtbar reich wurden. (vgl. z.B. Wußing 1989: S. 192f)

die die industrielle Revolution vorantrieben. Viele von ihnen sahen die Mathematik nicht als um ihrer selbst Willen wertvoll an, sondern als ein Hilfsmittel zur Bewältigung naturwissenschaftlicher und technischer Probleme.[226] Uwe Beck versucht zu erklären, warum sich in der Literatur kaum Äußerungen von Vertretern dieses Standpunktes finden: „Dort, wo man die Mathematik als reines Hilfsmittel sieht, geschieht dies teils unbewußt, ohne daß diese Einstellung expliziert wird. Dieser Standpunkt wird überwiegend praktiziert, selten analysiert und nur gelegentlich wird im Gespräch darüber philosophiert. Will man den Hilfsmittelstandpunkt aufdecken, so muß er aus einem entsprechenden Verhalten und Arbeitsstil herausgelesen werden.“[227] Im weiteren führt Beck einige Punkte an, die den Hilfsmittelstandpunkt kennzeichnen:

- Mathematik wird als Handwerkszeug angesehen, das allein an seiner Nützlichkeit gemessen wird.
- Schon fertig ausgearbeitete Lösungsmodelle werden bevorzugt.
- Abgesehen von dieser Nützlichkeit für die Lösung nicht mathematischer Probleme gibt es keinen Antrieb zur Auseinandersetzung mit der Mathematik.[228]

Es war mir wichtig, die Spaltung der Mathematik hier in ihrem historischem Zusammenhang darzustellen, da meiner Erfahrung aus vielen Gesprächen nach das Bewußtsein oft fehlt, daß es sich bei der Spaltung der Mathematik um ein geschichtliches Ereignis und nicht um eine natürliche Gegebenheit handelt. Wie „reine“ und anwendungsorientierte Mathematik, von einer weiteren Warte aus gesehen, einzuordnen und zu beurteilen sind, werde ich im Abschnitt „1.4 Mathematik und Anwendung“ meiner Arbeit diskutieren. Zunächst möchte ich die, durch die Grundlagenforschung in der Mathematik ausgelöste Entwicklung, weiter verfolgen.

1.3.6.3 Grundlagenforschung in der Analysis

Daß die Analysis, trotz ihres großen Erfolges in der Anwendung, logisch immer noch auf wackeligen Beinen stand und sich schließlich sogar innermathematische Widersprüche zeigten, bereitete vielen Mathematikern zunehmend Kopfzerbrechen. 1782 stellte die Göttinger Universität und 1784 die Berliner Akademie Preisfragen zu den grundlegenden Problemen der Analysis.[229] Im Preisrätsel der Berliner Akademie heißt es: „Die höhere Geometrie (d.h. Mathematik; im 18. Jh. werden Mathematik und Geometrie oft als synonyme Begriffe verwendet, Wg) benutzt häufig unendlich große und unendlich kleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, daß die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, daß man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und daß man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang zu machen.“[230] Das Er-

[226] vgl. Volk 1980: S. 31ff
[227] Beck 1979: S. 85
[228] vgl. Beck 1979: S. 85f
[229] vgl. Wußing 1989: S. 210
[230] Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. 4. Leipzig: 1908: S. 645. Z.n. Wußing 1989: S. 210

gebnis der nun einsetzenden Bemühungen um eine exaktere Fassung der Grundbegriffe der Analysis, lag zu Anfang des 19. Jahrhunderts „in der Erkenntnis, daß Angabe des Definitionsbereichs, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Existenz der höheren Ableitungen, Entwickelbarkeit in einer konvergenten Potenzreihe nicht einander implizierende Eigenschaften einer Funktion einer (reellen) Variablen sind, sondern vielmehr aufeinanderfolgende Stufen von Eigenschaften darstellen, die die Möglichkeit der Klasseneinteilung der Funktionen nach inneren Gründen eröffnen.“[231] Aufgrund dieser Erkenntnis wird eine neue, allgemeinere Fassung des Funktionsbegriffes möglich, wie sie zum Beispiel der deutsche Mathematiker Handke gab: „Eine Funktion heißt y von x, wenn jedem Wert der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.“[232]

1.3.6.4 Grundlagenforschung im Bereich der Zahlsysteme

Im Zusammenhang mit der Grundlagenforschung im Bereich der Analysis steht auch die Erforschung der verschiedenen Zahlbereiche. Hamilton gelingt es 1833 die, seit der Renaissance bekannten, komplexen Zahlen auf die reellen Zahlen zurückzuführen. Aber auch die reellen Zahlen, auf denen ja die Analysis aufbaut, bedürfen noch der weiteren Klärung. Besonders die irrationalen Zahlen wurden bisher oft unreflektiert als „unendliche Dezimalbrüche“ definiert. Dedekind führt 1858 als erster die irrationalen Zahlen auf die rationalen Zahlen zurück. Definitionen der irrationalen Zahlen über „Fundamentalreihen“ durch Cantor und über Intervallschachtelungen durch Bachman folgen einige Jahrzehnte später. 1889 entwickelt Peano sein berühmtes Axiomensystem für die natürlichen Zahlen und 1995 definiert Weber die rationalen Zahlen mit Hilfe von Paaren natürlicher Zahlen. Damit sind die verschiedenen Zahlbereiche zwar miteinander in Beziehung gebracht, es wird sich aber in Verbindung mit der Entwicklung der Mengenlehre und den Grundlagenproblemen der Mathematik noch zeigen, daß ein einheitlicher Aufbau des gesamten Zahlensystems noch erhebliche Schwierigkeiten in sich birgt.[233]

1.3.6.5 Grundlagenforschung in der Geometrie

Auch in der Geometrie begann am Ende des 18. Jahrhunderts der Versuch, Begriffe und Vorgehensweisen, die bislang vom „Gewohnheitsrecht“ bestimmt waren, exakt zu fassen und zu begründen. Dadurch entwickelte sich die Geometrie in verschiedene Richtungen weiter.[234] A. F. Möbius und J. Plücker erweiterten und präzisierten den Koordinatenbegriff. Es entstanden die projektive Geometrie, die synthetische Geometrie sowie die Vektor- und Tensorrechnung. Besonders einschneidend war aber die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie. Seit der Antike hatte man versucht, Euklids fünftes Postulat, das sogenannte Parallelenpostulat, mit Hilfe der anderen vier

[231] Wußing 1989: S. 211
[232] Hankel, H.: Untersuchung über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Leipzig 1905: S. 49. Z. n. Wußing 1989: S. 216.
[233] vgl. Volk 1989: S. 38ff und Wußing 1989: S. 217
[234] vgl. Wußing 1989: S. 248

Postulate zu beweisen.[235] Gauß zog „als erster den Schluß, daß das Parallelenpostulat von den anderen vier unabhängig ist und daß es daher möglich ist, eine Geometrie mit einem, dem Parallelenpostulat widersprechenden, anderen Axiom aufzubauen.“[236] Unabhängig voneinander kamen J. Bolyai und N. Lobatschewski zu ähnlichen Schlußfolgerungen. Es dauerte allerdings noch bis zum Ende des 19. Jahrhunderts, bis die verschiedenen Formen der nicht-euklidischen Geometrie allgemein anerkannt wurden. Nur kurze Zeit später erlangte die nicht-euklidische Geometrie als mathematischer Hintergrund für Einsteins Relativitätstheorie große Bedeutung.[237] In die vielen neuentstandenen Zweige der Geometrie versuchte der Mathematiker F. Klein in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts mit dem sogenannten „Erlanger Programm“ Ordnung zu bringen. Dabei setzte er die verschiedenen Teilgebiete der Geometrie mit Hilfe der Gruppentheorie zueinander in Beziehung. Er machte damit einen ersten Schritt in die Richtung des späteren Versuchs, die ganze Mathematik mittels mengentheoretischer Erwägungen durchzustrukturieren.[238] Klein trug außerdem Wesentliches zur Reform des Mathematikunterrichts am Gymnasium bei.[239]

1.3.6.6 Grundlagenforschung in der Logik

Weit größeren Einfluß auf die weitere Entwicklung der Mathematik, als die Grundlagenforschung in mathematischen Teildisziplinen wie Analysis oder Geometrie, hat vermutlich die Grundlagenforschung im Bereich der Logik gehabt. Lange Zeit liefen Mathematik und Logik als zwei getrennte Disziplinen nebeneinander her. Nach und nach begannen dann verschiedene Mathematiker nach Verbindungen zwischen Mathematik und Logik zu suchen. „Auf Leibniz [...] geht der Gedanke zurück, die Logik nach Art der Algebra zu einem Kalkül umzugestalten (‘calculus ratiocinator’), damit das formale Schließen nicht durch inhaltliche Momente und psychologische Einflüsse, die sich aus der Umgangssprache ergeben können, beeinflußt wird.“[240] Er beginnt an einer Begriffsschrift zu arbeiten, in der Aussagen durch die Kombination von Begriffe symbolisierenden Buchstaben dargestellt werden, kann dieses Projekt jedoch nicht vollenden.[241] „Die Bemühungen, die Logik zu kalkülisieren, sind nach Ansätzen im 18. Jahrhundert durch Lambert [...] und Gottfried Ploucquet (1716...1780) um die Mitte des 19. Jahrhunderts wieder aufgenommen und zugleich dazu verwendet worden, um der Mathematik, deren Schlußweisen mittlerweile immer mehr verfeinert worden waren, ein tragfähiges Gerüst zu geben.“[242] Boole versuchte 1847 zunächst die klassische, aristotelische Logik zu kalkülisieren und entwickelte schließlich die boolsche Algebra. Der Amerikaner Charles Peirce beschäftigte sich mit ähnlichen Problemen, während der Italiener Giuseppe Piano, das von ihm entwickelte Axiomensystem für die natürlichen Zahlen in symbolischer Schreibweise niederlegte. Auch Gottlob Frege leistete maßgebliches bei der Entwicklung eines Logikkalküls, seine Symbole waren jedoch

[235] vgl. Wußing 1997: S. 58
[236] Wußing 1997: S. 59
[237] vgl Wußing 1997: S. 58f
[238] vgl. Wußing 1989: S. 257ff
[239] vgl. den Abschnitt „3.1.2 Die Meraner Reformbewegung“ meiner Arbeit
[240] Kropp 1994: S. 209
[241] vgl. Wußing 1997: S. 99f
[242] Kropp 1994: S. 209

ungeschickt gewählt und konnten sich zunächst nicht durchsetzen; seine Ideen wurden aber später von Russel und Whitehead in der „Principia Mathematica“ wieder aufgenommen.[243]

1.3.6.7 Die Mengenlehre

Es hatte den Mathematikern schon von alters her Schwierigkeiten gemacht, den Begriff des Unendlichen scharf zu fassen. Mit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung, die ja auf dem Rechnen mit unendlich kleinen Größen aufbaut, wurden diese Schwierigkeiten zum Problem. Im Laufe der Mathematikgeschichte hatten sich zwei Sichtweisen des Unendlichen herauskristallisiert, die meistens als *Potential-Unendlich* und *Aktual-Unendlich* bezeichnet werden. Die Vertreter des Potential-Unendlichen hingen dabei eher der Sichtweise an, daß die Mathematik etwas vom Menschen Geschaffenes ist. Nach dieser Auffassung „erzeugt“ der Mensch die natürlichen Zahlen dadurch, daß er bei eins anfängt und - Schritt für Schritt - jeweils eins hinzufügt. Daß es für dieses Vorgehen keine Grenze gibt, daß man immer nochmal eins hinzufügen und so zu einer noch größeren Zahl gelangen kann, wird mit Potential-Unendlich gemeint. Da die Zahlenreihe kein Ende nimmt und gerade darin ihre Unendlichkeit besteht, macht es keinen Sinn, der Gesamtheit der natürlichen Zahlen eine bestimmte Größe zuordnen zu wollen. Die Vertreter des Aktual-Unendlichen stehen eher in der platonischen Tradition, die davon ausgeht, daß die Mathematik - wo auch immer - bereits existiert und von den Mathematikern lediglich entdeckt wird. Nach diesem Verständnis sind auch sämtliche natürlichen Zahlen bereits da, es macht also Sinn, von ihrer Gesamtheit als aktual-unendlicher Größe zu sprechen.[244] Die Sichtweise des Aktual-Unendlich ist aber nicht ganz einfach in den Griff zu bekommen, denn es lassen sich Dinge daraus ableiten, die auf den ersten Blick recht merkwürdig erscheinen; so verweist bereits in der Antike „Proclos Diadochos auf das folgende Paradoxon: Die Kreisfläche wird vom Durchmesser in zwei gleiche Teile geteilt. Der unendlich großen Zahl möglicher Durchmesser entspricht also quasi eine doppelt unendlich große Anzahl von Halbkreisflächen.“[245]
In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begann sich der Mathematiker Georg Cantor mit dem Begriff des Aktual-Unendlich und den damit zusammenhängenden Problemen zu beschäftigen. Die Ergebnisse, die er dabei erzielte, sollten die Entwicklung der Mathematik entscheidend beeinflussen. 1874 veröffentlicht er seine Arbeit „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen“[246]. Darin erklärt er, „daß sich zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der positiven rationalen Zahlen eine eineindeutige Zuordnung herstellen läßt und daß die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist.“[247] Er führt damit verschiedene Größenordnungen der Unendlichkeit ein. Etwas später findet er heraus, „daß die Menge der Punkte des Einheitsquadrates eineindeutig auf die Menge der Punkte der Einheitsstrecke abgebil-

[243] vgl. Kropp 1994: S. 210f und Wußing 1989: S. 277ff
[244] vgl. Volk 1980: S. 127ff und Wußing 1989: S. 262f
[245] Wußing 1989: S. 263
[246] vgl. Wußing 1989: S. 263f
[247] Wußing 1989: S. 264

det werden kann."[248] In den folgenden Jahren veröffentlicht Cantor weitere Arbeiten und 1895/97 schließlich die „Beiträge zur transfiniten Mengenlehre". Dort definiert er: „Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von *M* genannt werden) zu einem Ganzen."[249], und weiter: „'Mächtigkeit' oder 'Kardinalzahl' von *M* nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge *M* hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente *M* und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird."[250] Auch Richard Dedekind, der im Austausch mit Cantor stand, hat einiges zur Mengenlehre beigetragen. In seiner 1888 erschienenen Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?" führt er *Systeme von Dingen* ein, die Cantors Mengen entsprechen.[251] Er führt außerdem den Begriff der Vollständigkeit ein, in dem Sinn, „daß ein System vollständig bestimmt ist, wenn von jedem in Betracht gezogenen Ding feststeht, ob es Element des Systems ist, oder nicht."[252]

Die Mengenlehre findet begeisterte Anhänger ebenso wie erbitterte Gegner, die sich vor allem an Cantors Auffassung des Unendlichen als Aktual-Unendlich stören. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts hat sie sich in Mathematikerkreisen jedoch weitgehend durchgesetzt, zumal sie es erlaubt, neue Gebiete wie die moderne Algebra, die Theorie der reellen Funktionen und die Topologie zu erschließen. Als sich herausstellt, daß die Mengenlehre zu Widersprüchen, den sogenannten Antinomien führt, entsteht die „Grundlagenkrise der Mathematik".[253]

---

[248] Wußing 1989: S. 264
[249] Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen. Ed. E. Zermelo. Berlin 1889. S. 282. Z.n. Wußing 1989: S. 264
[250] Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen. Ed. E. Zermelo. Berlin 1889. S. 282. Z.n. Wußing 1989: S. 265
[251] vgl. Kropp 1994: S. 212
[252] Kropp 1994: S. 212
[253] vgl. Kropp 1994: S. 214 und Wußing 1989: S. 265f

1.3.7 Mathematik in der Krise

1.3.7.1 Grundlagenkrise?

Es gibt inzwischen eine Reihe von Mathematikhistorikern, die anzweifeln, daß der Begriff *Grundlagenkrise* die Situation der Mathematik um die Jahrhundertwende angemessen beschreibt. Sie argumentieren, von einer Grundlagenkrise könne man nur dann sprechen, wenn das, was die Mathematiker selbst als Grundlage der Mathematik betrachten, fragwürdig wird, also in die Krise gerät. Da die Mengenlehre, als verhältnismäßig neuer Zweig der Mathematik, von vielen Mathematikern gar nicht und von noch mehr sicherlich nicht als Grundlage der Mathematik anerkannt wurde, ist es nicht angemessen, im Zusammenhang mit den Antinomien der Mengenlehre von Grundlagenkrise zu reden. Auch der sich anschließende sogenannte *Grundlagenstreit* sei kein Streit um Grundlagen, sondern lediglich einer um die Zulässigkeit bestimmter Beweismethoden gewesen. Die Entstehung des Begriffes Grundlagenkrise, wird von Vertretern dieser Position in der Regel auf den besonderen Zeitgeist zurückgeführt, der um die Jahrhundertwende herrschte und in dessen Licht die Menschen beinahe alles „in der Krise“ sahen.

Christian Thiel argumentiert gegen diese Position, indem er anmerkt, daß man unter der Grundlage der Mathematik nicht ein festes System besonders grundlegender Mathematischer Sätze verstehen kann, sondern immer nur die Grundlegungsvorschläge, die die Mathematiker einer bestimmten Zeit machen. Dadurch bekommt der Begriff Grundlagenkrise eine soziologische Komponente. Zu einer Grundlagenkrise in diesem Sinne kommt es dann, wenn die Mathematiker einer bestimmten Zeit für die von ihnen betriebene Mathematik keine akzeptablen Grundlegungsvorschläge machen können, oder wenn es verschiedene Grundlegungsvorschläge gibt, über die keine Einigkeit besteht. In diesem Sinne würde der Begriff Grundlagenkrise die Situation zu Beginn des 20. Jahrhunderts durchaus korrekt beschreiben.[254] Nun - mit Worten läßt sich trefflich streiten - Tatsache ist, daß die Mengenlehre in der von Cantor entwickelten Form zu Widersprüchen führte, die zumindest einigen Mathematikern ernstes Kopfzerbrechen bereiteten.

1.3.7.2 Die Antinomien der Mengenlehre

Die erste Antinomie wird 1897 von Burali-Forti veröffentlicht. Darin wird gezeigt, daß die Annahme, es gebe eine Ordnungszahl der Menge aller Ordnungszahlen, zu einem formallogischen Widerspruch führt. Bald darauf entdeckt Russel eine weitere Antinomie, indem er versucht die Frage zu beantworten, ob sich die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten (ich nenne sie im folgenden A), selbst enthält oder nicht. Nimmt man an, daß A sich selbst enthält, folgt daraus, daß A sich nicht selbst enthält, geht man davon aus, daß A sich nicht selbst enthält, folgt daraus, daß A sich selbst enthält. Populär wurde die russelsche Antinomie in Form des Frisör-Problems: Ein Frisör rasiert genau jene Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasie-

[254] Thiel 1995: S. 330ff

ren. Rasiert sich der Frisör selbst oder nicht? Nach diesen beiden bekanntesten Antinomien tauchten noch weitere auf.

Unter den Mathematikern jener Zeit herrschte Einigkeit darüber, daß widersprüchliche Theorien in der Mathematik nicht zugelassen werden sollten. Andererseits wollten jedoch viele Mathematiker an der Mengenlehre, der Behandlung des Unendlichen als Aktual-Unendlich und den neuen Möglichkeiten, die sich daraus ergaben, festhalten. Beim Versuch, die Probleme zu lösen und Widersprüche zu verhindern, indem man 'Erlaubtes' von 'Unerlaubtem' trennte, gingen verschiedene Mathematiker verschiedene Wege, die ein jeweils ganz eigenes Verständnis vom Wesen der Mathematik und zum Teil auch von ihrem Verhältnis zur Wirklichkeit widerspiegelten. Im folgenden entwickelten sich auf diese Weise verschiedene mathematische Schulen.[255] Wußing schreibt dazu: „Obwohl diese Strömungen sich unter dem Eindruck der durch Antinomien erschütterten, um ihren Bestand ringenden Mengenlehre relativ schnell entfalteten, kann man die Antinomien nicht als alleinige Ursache dieser Erscheinung ansehen, da einerseits Keime aller drei[256] im folgenden zu besprechenden Denkweisen bereits vor der Entdeckung der Antinomien, ja zum Teil schon lange vor der expliziten Entdeckung der Mengenlehre nachweisbar sind, allerdings jede dieser Grundhaltungen einen objektiv vorhandenen Aspekt der Mathematik widerspiegelt, der auch unabhängig von den Grundlagenproblemen der Mengenlehre früher oder später ins Bewußtsein der Mathematiker dringen mußte."[257]

1.3.7.3 Logizismus

Der logizistische Standpunkt ist gleichzeitig ein platonischer. Die Logizisten vertreten die Ansicht, daß Mengen und Relationen in einer objektiven und vom menschlichen Bewußtsein unabhängigen Weise existieren. Die Antinomien in der Mengenlehre werden folglich darauf zurückgeführt, daß dieses „Reich der Mengen" von den Mathematikern nicht richtig erfaßt und widergespiegelt wird. Weiter gehen die Logizisten davon aus, daß es sich bei der Mengenlehre und der gesamten durch sie darstellbaren Mathematik um einen Bestandteil der Logik handelt und daß diese Mathematik keine außerlogischen Bestandteile enthält. Die Hauptvertreter des Logizismus: Russel und Whitehead, entwickeln in der 1910 bis 1913 veröffentlichten „Principia Mathematica" die sogenannte Typentheorie. Dabei handelt es sich um eine Axiomatisierung der Mengenlehre mit gewissen Einschränkungen, die die Antinomien verhindern sollen. Russel gelingt es nachzuweisen, daß die Antinomien der Mengenlehre bei der Verwendung *nicht-prädikativer Definitionen* entstehen; das sind Definitionen bei denen ein Gegenstand mit Hilfe einer Gesamtheit definiert wird, deren Teil er selbst ist. Die Typentheorie verhindert die zu Widersprüchen führenden nicht-prädikativen Definitionen, indem eine strenge Hierarchie von Relationen und Gegenständen eingeführt wird.[258] Dabei ist der Typ einer Relation stets höher „als die Typen aller Dinge, die in dieser Relation

[255] vgl. Volk 1984: S. 43ff u. 60
[256] Wußing unterscheidet Logizismus, Formalismus und Intuitionismus (vgl. Wußing 1989: S. 268). Ich beziehe zusätzlich noch die Strukturmathematik des Bourbakikreises in die Betrachtung mit ein.
[257] Wußing 1989: S. 268
[258] vgl. Kropp 1994: S. 215, Volk 1984: S. 60ff und Wußing 1989: S. 269

stehen, und in die Definition einer Relation dürfen nur Objekte niedrigeren Typs eingehen.“[259]

Sowohl die philosophische Grundlage, als auch das konkrete Vorgehen des Logizismus zog erhebliche Kritik auf sich. Die Auffassung des Logizismus, daß die Mengenlehre objektiv und unabhängig vom menschlichen Bewußtsein bereits existiere, wurde durch die Entdeckung in Frage gestellt, daß sich, ähnlich wie bei der nicht-euklidischen Geometrie, verschiedene in sich schlüssige „Mengenlehren“ aufbauen lassen, indem man das zugrundeliegende Axiomensystem abändert.[260] Der Logizismus kann auch dem Anspruch, ohne außerlogische Elemente auszukommen, nicht gerecht werden. Er benötigt mindestens drei zusätzliche Axiome: ein Unendlichkeitsaxiom, ein Auswahlaxiom und ein Reduzibilitätsaxiom. Das Reduzibilitätsaxiom, das festlegt, daß, zu jeder Funktion einer Variablen, eine für alle Werte äquivalente prädikative Funktion existiert, ist zudem uneinsichtig und setzt etwas voraus, was zu zeigen der Logizismus eigentlich leisten sollte. Ein letzter Punkt, der gegen die Typentheorie spricht, ist, daß durch sie zwar die Antinomien vermieden werden können, dafür aber verschiedene Beweise, besonders auf dem Gebiet der Analysis, um einiges komplizierter oder ganz unmöglich werden.[261] Auf Grund dieser gewichtigen Kritikpunkte wird der Logizismus heute praktisch nicht mehr vertreten.

1.3.7.4 Formalismus

Der Formalismus, mitunter auch Formal-Axiomatismus genannt, wurde von David Hilbert begründet. Hilbert will die Grundlagen der Mathematik sichern, indem er sie ganz auf der von ihm so genannten *axiomatischen Methode* aufbaut. In seiner 1899 veröffentlichten Schrift „Grundlagen der Geometrie“ beginnt er damit, die axiomatische Methode auf die Geometrie anzuwenden. Auf den ersten Blick scheint Hilbert dabei eine Vervollständigung des euklidischen Axiomensystems vorzunehmen, bei näherer Betrachtung wird aber deutlich, daß er etwas ganz anderes tut.

Euklid verwendet in seinen „Elementen“ explizite Definitionen. Seine Axiome sind „unmittelbar einleuchtende“ Aussagen, in denen nur bekannte Begriffe verwendet werden. Wie ich weiter oben bereits erläutert habe, lag ein Problem der axiomatischen Methode, so wie sie von Euklid verwendet und von Aristoteles beschrieben wurde, in der Frage, was als unmittelbar einleuchtend zu akzeptieren war. Hilbert versucht dieses Problem zu vermeiden, indem er auf explizite Definitionen, die ihre Begriffe voraussetzen, verzichtet. Statt dessen verwendet er implizite Definitionen. Dabei werden die in einer Theorie verwendeten Begriffe nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern durch ihre Beziehungen zu den anderen verwendeten Begriffen definiert, die in, der Theorie vorangestellten, Axiomen festgelegt werden. Durch diese Verwendung impliziter Definitionen, die Begriffe ohne Bezug zu etwas, das außerhalb der Theorie steht, allein durch ihr Verhältnis untereinander festlegen, möchte Hilbert voraussetzungsfreie Theorien schaffen. Dieses Vorgehen hat weitreichende Konsequenzen.

[259] Wußing 1989: S. 269
[260] vgl. Wußing 1989: S. 267ff
[261] vgl. Kropp 1994: S. 215 und Volk 1984: S. 65f

Die Axiome bei Aristoteles waren inhaltliche Aussagen, die sich auf Gegenstände ausserhalb der Theorie bezogen und so den Anfang einer inhaltlichen Theorie bildeten. Hilberts Axiome hingegen sind inhaltsleere Aussageformen, die auf alles und nichts bezogen werden können und somit keine inhaltliche Theorie bilden, sondern eine formale Struktur definieren. Hilbert kann damit das Evidenzproblem der aristotelischen Axiomatik nicht lösen, aber vermeiden. Da es sich bei seinen Axiomen um Aussageformen handelt, die in sich weder wahr noch falsch sind, können sie frei gewählt werden. Im weiteren Vorgehen, leitet Hilbert aus seinen Axiomen durch formal-logisches Deduzieren weitere Aussageformen ab. Eine so gebildete formale Theorie besitzt demnach drei Gruppen von Regeln:

- Regeln, die die in der Theorie vorkommenden Zeichen festlegen.
- Regeln, die bestimmen, welche Zeichenkombinationen erlaubt sind.
- Regeln, die beschreiben, wie aus gegebenen Zeichenreihen andere Zeichenreihen gebildet werden können.

Die Mathematik wird so zu einer bloßen Manipulation von Zeichenketten.[262] Lorenzen beschreibt das so: „Den Sinn (oder Inhalt) der Zeichen und Formeln kann man bei dieser formalistischen Auffassung gänzlich vergessen; es kommt nur auf die Form; d.h. nur auf die Zeichen selbst an: aus vorgeschriebenen Formeln werden nach vorgegebenen Regeln weitere Formeln hergestellt, weiter nichts.“[263] Bildeten „klassische“ mathematische Theorien Systeme von Begründungszusammenhängen, so stellen diese formalen Theorien Formen möglicher Begründungszusammenhänge dar, die erst interpretiert werden müssen, damit sie zu inhaltlichen Aussagensystemen werden.

Da die von Hilbert konzipierten Axiomensysteme keinerlei Realitätsbezug besitzen, stellt die Widerspruchsfreiheit des Systems das einzige Kriterium für die Auswahl der Axiome dar. Diese Widerspruchsfreiheit ist aber absolut notwendig, da sich in einem formal-logischen System aus einem Widerspruch Beliebiges ableiten läßt, was das System ziemlich langweilig machen würde.[264] Um die Widerspruchsfreiheit eines formal-logischen Systemes zu zeigen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man kann *die relative Widerspruchsfreiheit* eines Systemes zeigen, indem man es auf ein anderes System zurückführt, dessen Widerspruchsfreiheit man annimmt. Damit hat man aber das Problem nur verschoben, weil nun die Widerspruchsfreiheit dieses zweiten Systems zu zeigen ist, was letztendlich zu einem logischen Zirkel oder zu einem endlosen Regreß führt. Man kann aber auch versuchen, die *absolute Widerspruchsfreiheit* eines Systems zu zeigen, ohne die Widerspruchsfreiheit anderer formal-logischer Systeme vorauszusetzen. Und genau das versucht Hilbert: ausgehend von solchen Schlußweisen, die von jeder Anfechtung frei sind, möchte er die Widerspruchsfreiheit der gesamten Mathe-

[262] vgl. Meschkowski 1990: S. 223ff, Volk 1984: S. 67ff und Wußing 1989: S. 269f

[263] Lorenzen, P.: Moralische Argumentationen im Grundlagenstreit der Mathematiker (1967). In: Lorenzen, P.: Methodisches Denken. Frankfurt 1968. Z.n. Volk 1984: S. 75

[264] Barrow führt dazu folgende Anekdote an: „Als Betrand Russell einmal in einem Vortrag diesen Gedanke n-gang ausführte, forderte ein skeptischer Zwischenrufer ihn auf, doch zu beweisen, daß er der Papst sei, wenn zwei mal zwei fünf ist. Russell antwortete ihm ohne zu zögern: Wenn zwei mal zwei fünf ist, dann ist vier gleich fünf, ziehen sie drei ab, dann ist eins gleich zwei, Sie und der Papst sind zwei, also sind Sie und der Papst eins. (Barrow 1993: S. 54)

matik beweisen. Dieses Unternehmen ging als „Hilbert-Programm“ in die Mathematikgeschiche ein. Um es durchzuführen, müssen die in einem formal-logischen System möglichen Beweise zu Gegenständen einer übergeordneten Theorie gemacht werden. Zu diesem Zweck entwickelt Hilbert die sogenannte *Metamathematik*, eine Beweistheorie, die, über die aus inhaltslehren Aussageformen bestehenden formal-logischen Systeme, Aussagen macht.[265] Hilbert selbst beschreibt sein Vorgehen so: „Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Zu der eigentlichen ... formalisierten Mathematik kommt eine gewisse neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der - im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik - das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome. In dieser Metamathematik wird mit den Beweisen der eigentlichen Mathematik operiert und diese bilden selbst den Gegenstand der inhaltlichen Untersuchung.“[266]

Zunächst hatte Hilbert mit seinem Programm großen Erfolg und konnte die Widerspruchsfreiheit immer größerer axiomatischer Systeme bis hin zur euklidischen Geometrie zeigen. Das nächste Ziel, das Hilbert sich setzte, war die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik nachzuweisen. Das jedoch sollte ihm nicht nur nicht gelingen - Kurt Gödel, ein bis dahin unbekannter Mathematiker aus Wien, stellte zwei Metamathematische Sätze auf, die die grundsätzliche Vergeblichkeit seiner Bemühungen zeigten. Der erste dieser Sätze war der sogenannte *Unvollständigkeitssatz*. Er besagt, daß in jedem endlichen, widerspruchsfreien Axiomensystem, das die Arithmetik umfaßt, wahre arithmetische Sätze existieren, die man mit Hilfe dieses Systems zwar formulieren, aus ihm aber nicht formal-logisch ableiten kann, selbst wenn man das System um beliebig viele Axiome ergänzt.[267] Quine führt dazu näher aus: „Zu jedem gegebenen Beweisverfahren P für die elementare Zahlentheorie (kann man) einen Satz S_P der elementaren Zahlentheorie konstruieren, der genau dann wahr ist, wenn er nicht durch das Verfahren P bewiesen werden kann. Entweder ist S_P beweisbar: dann ist S_P falsch, das allgemeine Beweisverfahren P ist also diskreditiert; oder S_P ist wahr und nicht beweisbar, das Beweisverfahren ist also unvollständig.“[268] Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz zeigt, daß es nicht möglich ist, die gesamte Arithmetik, geschweige denn die ganze Mathematik in Form eines formalaxiomatischen Systems darzustellen.[269]
Der zweite von Gödels Sätzen war der *Unableitbarkeitssatz*: „Es ist nicht möglich, die Widerspruchsfreiheit einer formal gegebenen (abgegrenzten) Theorie, welche die reine Zahlentheorie in sich enthält (und bereits dieser selbst), mit den gesamten Hilfsmitteln der betreffenden Theorie selbst nachzuweisen (vorausgesetzt, daß diese Theorie wirklich widerspruchsfrei ist).“[270] Um die Widerspruchsfreiheit eines Systems zu beweisen,

265 Volk 1984: S. 80ff
266 Hilbert: Die logischen Grundlagen der Mathematik (1923). In: Hilbert: Gesammelte Abhandlungen, Bd. III. Berlin: 1935. S. 180. Z.n. Volk 1984: S. 85.
267 vgl. Barrow 1993: S. 54 und Volk 1984: S. 88f.
268 Quine, W.V.: Grundzüge der Logik. 1964. zit. n. Frankfurt: 1969. S. 312. Z.n. Volk 1984: S. 88
269 vgl. Volk 1984: S. 89
270 Gödel, Kurt: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. In: Monatshefte für Mathematik und Physik. Bd. 38, 1931. S. 173. Z. n. Volk 1984: S. 90.

das die Arithmetik umfaßt, benötigt man also ein Beweissystem, das selbst komplexer ist als das System, dessen Widerspruchsfreiheit bewiesen werden soll. Damit stellt sich das Problem, die Widerspruchsfreiheit des Beweissystems zu beweisen, wofür man wiederum ein komplexeres System benötigt, dessen Widerspruchsfreiheit bewiesen werden muß... Damit ist Hilberts Programm endgültig gescheitert.[271]

Trotz dieses Scheiterns beeinflußt Hilberts Denken bis heute zahlreiche Mathematiker. Er prägte die Vorstellung von der Mathematik als einer, von jeder Deutung unabhängigen „wenn-dann Wissenschaft", die vor allem unter den „reinen" Mathematikern viele Anhänger fand. Nagel und Newmann fassen diese Sichtweise so zusammen: „... es wurde deutlich, daß die Mathematik schlechthin jene Disziplin ist, die die Folgerungen zieht, die von einem vorliegenden Axiomen- oder Postulatsystem logisch impliziert werden. Tatsächlich erkannte man, daß die Gültigkeit einer mathematischen Ableitung von einer speziellen Bedeutung der in den Postulaten benutzten Zeichen oder Ausdrücke in keiner Weise abhängt ... Wir wiederholen, daß sich der reine Mathematiker (...) nicht mit der Frage befaßt, ob die festgesetzten Postulate oder die abgeleiteten Folgerungen wahr sind, sondern einzig damit, ob die behaupteten Folgesätze tatsächlich aus den ursprünglichen Festsetzungen logisch notwendig folgen."[272] Treffend bemerkt Russel: „Als Mathematik können wir also das Gebiet bezeichnen, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden, und ob das, was wir sagen, auch wahr ist."[273] Wo der Logizismus philosophische Probleme bekommt, weil er mathematischen Objekten eine mystische, vom menschlichen Bewußtsein unabhängige Existenz in einer Art platonischer Ideenwelt zuschreibt, definiert der Formalismus einfach, daß mathematische Objekte dann existent sind, wenn sie sich aus einem widerspruchsfreien Axiomensystem herleiten lassen. „Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz."[274]

Derartig extreme philosophische Positionen forderten natürlich auch Widerspruch heraus. Volk kritisiert vor allem, daß es innerhalb des Formalaxiomatismus und seiner Metatheorie keine Möglichkeit gibt, zwischen verschiedenen widerspruchsfreien Strukturen zu gewichten, beziehungsweise zu begründen, warum man sich mit bestimmten Strukturen befaßt und mit anderen nicht. Dadurch, daß sich die formalaxiomatische Mathematik ausschließlich mit Aussageformen befaßt, die erst durch ihre Interpretation eine Bedeutung erlangen, die aber von der Mathematik selbst nicht geleistet werden kann, wird die Mathematik zum moral- und zweckfreien Raum. Die Mathematik stellt allenfalls potentielle Lösungen für potentielle Probleme zur Verfügung, was andere damit anfangen, ist nicht Sache des Mathematikers.[275] Wie ich im Abschnitt „1.3.6.2 Die Spaltung der Mathematik" meiner Arbeit, am Beispiel Hardys schon dargestellt

[271] Volk 1984: S. 89f
[272] Nagel / Newman. Der Gödelsche Beweis. Wien; München: 1958. 17f. Z.n. Volk 1984: S. 87
[273] Russel, B.: Die Mathematik und die Metaphysiker, 1901 erschienen unter dem Titel: „Recent Work in the Philosophie of Mathematics", z.n. Kursbuch 8, 1967, S. 8f. Z.n. Volk 1984: S. 94.
[274] Aus einem Brief Hilberts an Frege. In: Steck, G. (Hg.): Sitzungsbericht der Heidelberger Akademie der Wiss., math.nat. Kl., 1941. Z.n. Meschkowski 1969: S. 44
[275] vgl. Volk 1984: S. 77ff

habe, gab es Mathematiker, die an dieser Sinn- und Nutzlosigkeit der Mathematik nicht nur nichts Falsches sahen, sondern sie sogar offensiv einforderten. Ein weiteres Argument gegen Hilberts Sichtweise ist, daß sie der Mathematik als geschichtlichem Phänomen, so wie sie sich über Jahrtausende und wie ich gezeigt habe, oft in enger Verbindung mit Anwendungsproblemen entwickelt hat, einfach nicht gerecht wird.[276]

1.3.7.5 Die Strukturmathematik des Bourbakikreises

Im Jahr 1934 trifft sich zum erstenmal eine Gruppe französischer Mathematiker, um gemeinsam ein Lehrbuch der Analysis zu schreiben. Dabei verwendet sie das Pseudonym Nikolas Bourbaki[277]. 1935 entschließt sich die Gruppe, deren Zusammensetzung sich im Laufe der Zeit änderte, die gesamte Mathematik axiomatisch darzustellen und ihre verschiedenen Gebiete in Beziehung zueinander zu setzen. Dabei hat sie keine Lösung für die Probleme, die Gödel der formalaxiomatischen Mathematik nachgewiesen hatte, sondern ignoriert sie ganz bewußt. Barrow zitiert Bourbaki mit folgenden Worten: „Wir glauben daran, daß die Mathematik bestimmt ist zu überleben und daß die wesentlichen Teile des großartigen Gebäudes niemals zusammenbrechen werden, weil plötzlich ein Widerspruch auftaucht; aber wir können nicht behaupten, daß dieser Glaube auf etwas anderem als der Erfahrung beruht. Man könnte sagen, das sei nicht viel. Aber fünfundzwanzig Jahrhunderte lang haben Mathematiker ihre Irrtümer korrigiert und damit ihre Wissenschaft immer nur bereichert und nicht zerstört; das gibt ihnen das Recht, der Zukunft mit Gleichmut entgegenzusehen.“[278] Hilberts Anspruch, daß die Widerspruchsfreiheit formalaxiomatischer Systeme bewiesen werden müsse,

[276] vgl. Volk 1984: S. 87f

[277] „Niemand scheint zu wissen, warum die Gruppe französischer Mathematiker, die das Projekt begann, sich nach einem nicht existierenden Franzosen benannte. Möglicherweise haben sie sich durch die Erinnerung an einen exzentrischen französischen Armeeoffizier inspirieren lassen, den General Charles Denis Sauter Bourbaki, der im Preußisch-Französischen Krieg eine Rolle spielte und offenbar im Jahre 1862 die Krone Griechenlands angeboten bekommen und abgelehnt hatte. Ein Jahrzehnt später hatte sich sein Schicksal gewendet, und er war mit seinen Soldaten in der Schweiz interniert, wo er versuchte, sich zu erschießen - nur er traf nicht. Ein Denkmal des Generals steht in Nancy, und mit der Universität Nancy ist die Geschichte manch eines Mitglieds der Gruppe verbunden. Es gibt noch eine ganze Reihe von Anekdoten über den wirklichen Herrn Bourbaki, die meisten davon zweifellos der Phantasie der Gruppe Bourbaki entsprungen, welche die Legende angemessen ausgeschmückt halten wollte.“ (vgl. Barrow 1993: S. 59)

[278] Bourbaki, z.n. Barrow 1993: S. 60, dort keine Quellenangabe.

wird also aufgegeben und durch *bloße Hoffnung* auf Widerspruchsfreiheit ersetzt. Barrow nennt dies einen „kastrierten Formalismus“.[279]

Dieser Vorwurf Barrows ist nicht ganz berechtigt, denn es gibt einen grundlegenden Unterschied zwischen Hilberts Formalaxiomatismus und der Strukturmathematik des Bourbakikreises. Der Formalismus geht von einem statischen Bestand an mathematischen Wahrheiten aus, der gesichert werden muß und für ein solches Unterfangen sind die Gödelschen Sätze verheerend. Der Bourbakikreis betont hingegen die dynamische Natur der Mathematik, was zu einem etwas lockereren Umgang mit den Gödelschen Sätzen durchaus berechtigt: „Wir wollen den Leser nicht veranlassen zu denken, daß wir den Anspruch erheben, ein endgültiges Stadium der Wissenschaft umrissen zu haben. Die *Strukturen* sind *nicht unveränderlich,* weder in ihrer Anzahl noch in ihrem wesentlichen Inhalt.“[280]

Für die Gruppe Bourbaki ist die Mathematik ein von Mathematikern geschaffenes „lebendiges, wachsendes Ganzes, das durchorganisiert werden muß, damit es nicht chaotisch zerfällt.“[281] „Die Mathematik gleicht so einer großen Stadt, deren Außenbezirke und Vororte dauernd in etwas chaotischer Weise in das umgebende Land eindringen, während das Zentrum von Zeit zu Zeit neu aufgebaut wird, jedesmal nach einem klarer gefaßten Plan und in einer neuen, großartigen Ordnung, wobei die alten Viertel mit einem Labyrinth von Gassen niedergerissen werden und zur Peripherie hin neue, direktere, breitere und bequemere Straßen angelegt werden.“[282] Diese ständig stattfindende Neuorganisation versucht Bourbaki durch eine Axiomatisierung der einzelnen Gebiete und ihrer Ordnung anhand algebraischer Strukturen zu schaffen, weshalb in diesem Zusammenhang auch von bourbakischer *Strukturmathematik* die Rede ist. Die auf diese Weise von Bourbaki neu geschaffenen Strukturen entsprechen dabei nicht immer den klassischen Disziplinen der Mathematik: „Waren bisher Algebra, Analysis, Zahlentheorie und Geometrie scharf voneinander geschiedene Provinzen der Mathematik, so werden wir z.B. sehen, daß die Theorie der Primzahlen zu der Theorie der algebraischen Kurven eng benachbart ist, oder daß die Euklidische Geometrie an die Theorie der Integralgleichungen grenzt. Das *Ordnungsprinzip* wird dabei die Vorstellung einer *Hierarchie von Strukturen* sein, die vom Einfachen zum Komplizierten und vom Allgemeinen zum Besonderen geht.“[283]

Die Beziehung von Mathematik und Wirklichkeit ist für Bourbaki eine rein zufällige. „So zeigte es sich am Ende, daß diese innige Verbindung von Mathematik und Wirklichkeit, deren harmonische innere Notwendigkeit wir bewundern sollten, nichts weiter war als eine zufällige Berührung zweier Disziplinen [...]. Vom axiomatischen Standpunkt aus erscheint die *Mathematik* so als *eine Schatzkammer von abstrakten Formen*, den *mathematischen Strukturen*; und es trifft sich so - ohne daß wir wissen warum -, daß gewisse Aspekte der empirischen Wirklichkeit in diese Formen passen, als wären

[279] Barrow 1993: S. 58
[280] Bourbaki 1974: S. 155. Hervorhebungen dort.
[281] Barrow 1993: S. 59
[282] Bourbaki 1974: S. 156
[283] Bourbaki 1974: S. 153. Hervorhebungen dort.

sie ihnen ursprünglich angepaßt worden.“[284]

Die bourbakische Strukturmathematik wird nach wie vor von vielen, vor allem „reinen“ Mathematikern vertreten und nahm großen Einfluß auf die Lehrplanreform in den 60er Jahren in Deutschland, in deren Rahmen die sogenannte „neue Mathematik“ eingeführt wurde.[285]

1.3.7.6 Intuitionismus

Logizismus und Formalismus hatten versucht, sowohl den Bestand der „klassischen“ Mathematik als auch die Mengenlehre, unter Einbeziehung der Vorstellung des Aktual-Unendlich, durch zunehmende Formalisierung zu retten, während die Anhänger der bourbakischen Strukturmathematik einfach darauf vertrauten, daß schon alles gutgehen und wenn nicht, eben geändert werden würde. Die Intuitionisten hingegen wollten der Mathematik ein sicheres Fundament geben, indem sie die Vorstellung des Aktual-Unendlich aufgaben und einige Schlußregeln der klassischen Logik einer sprachlichen Kritik unterzogen. Vertreter des Intuitionismus waren unter anderen Kronecker, Brouwer und Weyl.[286]

„Für den Intuitionismus steht die aus der aktivistischen Betätigung des Menschen entspringende ‘Urintuition’[287] des Zählens am Beginn des Denkens; die Logik gewinne man aus der sprachschriftlichen Beschreibung mathematischer Aussagen erst durch nachträgliche Abstraktion.“[288] Die Intuitionisten waren damit Anhänger der Vorstellung des Potential-Unendlich, wie ich sie im Abschnitt „1.3.6.7 Die Mengenlehre“ bereits kurz geschildert habe. Der Mathematiker Erhard Schmidt faßt die unterschiedlichen Vorstellungen vom Unendlichen anschaulich zusammen: „Die naive von Cantor in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts zur Herrschaft gebrachte Auffassung der unendlichen Mengen sieht die gesamte unendliche Zahlenreihe als von Anfang an in Reihe und Glied im Manöverfelde des Geistes dastehend an und betrachtet die Definition einer bestimmten Zahl gewissermaßen bloß als die an ein bestimmtes Glied gerichtete Aufforderung, aus der Reihe hervorzutreten. Die entgegengesetzte, sogenannte *intuitionistische* Auffassung erkennt dagegen nur ein unbegrenztes Verfahren zur Schaffung immer neuer Zahlen als gegeben an.“[289]

Aus dieser Auffassung der Intuitionisten geht auch ihre Kritik am „Satz des ausgeschlossenen Dritten“ zurück. Schmidt veranschaulicht dies am Beispiel der bisher unbewiesenen Behauptung, daß sich alle geraden Zahlen als die Summe von zwei Primzahlen darstellen ließen. „Der naiven Auffassung der unendlichen Zahlenreihe erscheint folgende Behauptung evident: ‘Entweder lassen sich alle geraden Zahlen als

[284] Bourbaki 1974: S. 158. Hervorhebungen dort.
[285] vgl. Barrow 1993: S. 60f und den Abschnitt „3.1.5 Die ‘neue’ Mathematik“ meiner Arbeit
[286] vgl. Kropp 1994: S. 215f
[287] Vermutlich entspricht diese ‘Urintuition’ dem, was ich am Anfang meiner Arbeit in Anlehnung an Ifrah als Zahlgefühl bezeichnet habe.
[288] Kropp 1994: S. 215
[289] Schmidt: Über Gewißheit in der Mathematik. Rektoratsrede. Berlin 1930. Z.n. Meschkowski 1990. S. 238. Hervorhebung dort.

Summe von zwei Primzahlen darstellen, oder es gibt gerade Zahlen, für die das nicht zutrifft'. Das ist das sogenannte 'Tertium non datur' der aristotelischen Logik. Für diese Auffassung ist eben die unendliche Zahlenreihe ein wohlbestimmtes, fest existierendes Ganzes, für welches jedes einschlägige Urteil entweder zutrifft oder nicht. Der Intuitionist erklärt die gemachte Disjunktion für nicht zwingend oder sinnlos. Er sagt: 'Was bedeutet die erste Alternative?' 'Alle geraden Zahlen sind als Summen von zwei Primzahlen darstellbar. Das kann doch nicht bedeuten, daß dieser Sachverhalt für alle geraden Zahlen einzeln als zutreffend feststellbar ist. Das ist nicht nur unausführbar, sondern sogar undenkbar. Die Behauptung kann nur den folgenden Sinn haben: Aus der Eigenschaft einer Zahl gerade zu sein, kann gefolgert, d.h. bewiesen werden, daß sie als Summe zweier Primzahlen zerlegbar ist.' Was bedeutet nun für den Intuitionisten die andere Alternative? 'Es gibt gerade Zahlen, die nicht als Summe von zwei Primzahlen darstellbar sind'. Diese Aussage kann für die Intuitionisten nur den Sinn haben: 'Es liegt ein Verfahren vor, eine solche Zahl zu bestimmen'."[290] Durch die Reduzierung der beiden Aussagen auf ihren, aus intuitionistischer Sicht, wirklichen Sinn, stellen sie keine zwingende Alternative mehr dar. „Das Nichtvorhandensein eines Beweises für die Zerlegbarkeit liefert uns offenbar noch kein Konstruktionsverfahren für ein Gegenbeispiel. Die gestellte Frage kann eben an sich offenbleiben müssen; es besteht keine Garantie, daß ihre Entscheidung überhaupt möglich ist. Allerdings läßt sich wiederum leicht zeigen, daß die Unentscheidbarkeit einer solchen Frage selbst eine Aussage darstellt, die nie bewiesen werden kann."[291]

Diese Argumentation ist natürlich nicht auf das Problem der Summe zweier Primzahlen beschränkt. Nach Intuitionistischer Sicht, gilt der „Satz des ausgeschlossenen Dritten" für die Eigenschaften der Elemente unendlicher Mengen mathematischer Gegenstände grundsätzlich nicht. Aussagen über die Eigenschaften solcher Elemente sind in folge dessen nicht entweder wahr oder falsch, sondern wahr, falsch oder unentschieden. Bei Mengen mit endlich vielen Elementen wird der „Satz des ausgeschlossenen Dritten" auch von intuitionistischen Mathematikern anerkannt, weil hier - zumindest theoretisch - für jedes Element das Zutreffen oder Nichtzutreffen der in Frage stehenden Eigenschaft einzeln nachgeprüft werden kann. Seine Ausweitung auf unendliche Mengen wird jedoch als unzulässig betrachtet.

Dies hat weitreichende Konsequenzen; daß der Beweis durch die „reducio ad absurdum" im Bereich unendlicher Mengen nicht mehr möglich ist, weil er auf dem „Satz des ausgeschlossenen Dritten" aufbaut, gehört dabei noch zu den harmloseren.[292] Schwerer wiegt, daß man von zwei reellen Zahlen nun nicht mehr mit Sicherheit sagen kann, daß sie entweder verschieden oder gleich sind. Eine reelle Zahl kann durch einen unendlichen Dezimalbruch bzw. durch ein Verfahren, daß für jede Stelle des Dezimalbruchs die entsprechende Ziffer festlegt, bestimmt werden. Es ist nun möglich, daß die Ziffern zweier solcher Dezimalbrüche, so weit man nachprüftt übereinstimmen, aber ohne daß sich ihre Übereinstimmung an allen Stellen beweisen läßt. In diesem Fall muß die Frage, ob die beiden Zahlen verschieden oder gleich sind, schlicht offenblei-

[290] Schmidt: Über Gewißheit in der Mathematik. Rektoratsrede. Berlin 1930. Z.n. Meschkowski 1990. S. 239
[291] Schmidt: Über Gewißheit in der Mathematik. Rektoratsrede. Berlin 1930. Z.n. Meschkowski 1990. S. 240
[292] vgl. Barrow 1993: S. 66f

ben.[293] „Das Kontinuum, d. h. die Gesamtheit aller reellen Zahlen, ist eben in der intuitionistischen Auffassung nicht mehr die Zusammenfassung von unendlich vielen festexistierenden Zahlenindividuen, sondern nur ein Feld des Werdens von Zahlen durch unbeschränkte Steigerung der Genauigkeit ihrer Bestimmung, ein Bereich unbeschränkter definitorischer, zahlenerzeugender Möglichkeiten.“[294]

Aus dem Intuitionismus heraus entwickelte sich eine ganze Reihe von Versuchen, die Mathematik auf rein konstruktiven[295] Beweisverfahren aufzubauen. Besondere Bedeutung erlangte dabei die Arbeit von Lorenzen. Viele Beweise werden durch das konstruktive Vorgehen aber sehr kompliziert und weite Teile der Mathematik müßten aufgegeben werden. Der konstruktiven Mathematik zugute zu halten ist aber sicherlich, daß sie den Verfahrensaspekt der Mathematik wieder mehr in das Blickfeld der Mathematiker rückte.[296]

Im folgenden, von seinen Begründern sicherlich nicht vorhersehbar, erlangte der intuitionistische Ansatz Bedeutung für die Grundlegung der Informatik. Es zeigten sich enge Zusammenhänge zwischen der intuitionistischen Mathematik und dem, was ein idealisierter, theoretischer Computer - die nach dem Mathematiker Alan Turing benannte Turingmaschine - innerhalb endlicher Zeit berechnen kann.[297]

1.3.7.7 Welche Grundlagenkrise?

Während sich ein Teil der Mathematiker über die Grundlagen der Mathematik stritt, gab es auch zahlreiche Mathematiker, die diesen Streit einfach ignorierten und weiterarbeiteten als sei nichts gewesen. So schreibt Thiel: „Nicht unmittelbar über Grundlagenprobleme arbeitende Vertreter der Fachmathematik haben häufig und nicht ohne eine gewisse Genugtuung betont, daß die ‘eigentliche’ Mathematik von den mengentheoretischen Antinomien weder in ihrer praktischen Sicherheit noch in ihrem wissenschaftlichen Fortschritt irgendwie behindert worden sei. Ja sie werde von den mengentheoretischen Antinomien im Grunde überhaupt nicht berührt, da die bei deren Herleitung verwendeten Konstruktionen gar nicht typisch mathematisch seien: sie träten in der ‘richtigen’ Mathematik nicht auf und gehörten eher der Logik oder bestimmten Systemen der allgemeinen Mengenlehre an, auf die man sich als Mathematiker nicht unbedingt stützen müsse und - wie die Erfahrung der Antinomien ja lehre - am besten auch tatsächlich nicht stütze.“[298] Die meisten anwendungsorientierten Mathematiker teilten diese Auffassung sicherlich, zumal Konrad Zuse 1941 den ersten funktionsfähigen elektromechanischen Rechner der Welt „Z3“ fertigstellte und damit die Tür zu

---

[293] vgl. Schmidt: Über Gewißheit in der Mathematik. Rektoratsrede. Berlin 1930. Z.n. Meschkowski 1990. S. 241

[294] Schmidt: Über Gewißheit in der Mathematik. Rektoratsrede. Berlin 1930. Z.n. Meschkowski 1990. S. 242

[295] Zum Teil ist in diesem Zusammenhang in der Literatur von konstruktivistischen Verfahren oder sogar von konstruktivistischer Mathematik zu lesen. (vgl. Barrow 1993: S. 65ff) Meiner Meinung nach sollten diese Begriffe für eine andere Sichtweise von Mathematik vorbehalten bleiben, die sich an der konstruktivistischen Erkenntnistheorie orientiert. Davon im zweiten kapitel mehr.

[296] vgl. Volk 1984: S. 109ff und Wußing 1989: S. 270

[297] vgl. Barrow 1993: S. 69f und Wußing 1989: S. 270

[298] Thiel 1995: S. 330f

einem völlig neuen Aufgabenfeld für die angewandte Mathematik aufstieß.

1.3.8 Auf dem Weg in die Zukunft

1.3.8.1 Computerisierung

Bereits in der Mitte des 19. Jahrhunderts, versuchte Charles Babbage die „Analytical Engine“, einen programmierbaren mechanischen Rechner, zu bauen. Er scheiterte jedoch an der unzulänglichen Technik seiner Zeit. 1890 folgte die Lochkartenmaschine von Hollerith, die bereits elektrische Schaltungen verwendete und für die elfte amerikanische Volkszählung eingesetzt wurde. Kurz nachdem Zuse seinen Z3 fertiggestellt hatte, konnten englische Wissenschaftler den ersten elektronischen Rechner „Colossus 1“ in Betrieb nehmen. In Amerika erblickten 1944 der Rechner „Mark I“ und der mit 18000 Elektronenröhren bestückte „ENIAC“ das Licht der Welt. Bis zu diesem Zeitpunkt erfolgte die Programmierung der Rechner direkt über Änderungen an der Hardware. Der Mathematiker John von Neumann schlug schließlich vor, den Programmablauf in Form von Daten einzugeben, die von der Maschine gespeichert und leicht verändert werden konnten. Die Software war geboren.[299]

Eine stürmische Entwicklung setzte ein. Durch die Erfindung des Transistors im Jahr 1948 konnten Rechner gebaut werden, die kleiner, billiger und weniger störanfällig waren, als die mit Röhren bestückten Rechner. Dennoch blieben Computer zunächst fast ausschließlich dem militärischen und wissenschaftlichen Bereich vorbehalten. Ab 1965 wurden integrierte Schaltkreise, ab 1971 Mikroprozessoren eingesetzt. Immer mehr Rechner wurden nun auch in der Privatwirtschaft eingesetzt. Schließlich wurden Computer in Form günstiger „Personal“ und „Home“ Computern auch Privatleuten in breitem Maße zugänglich.[300] Heute durchdringen Computer - sichtbar und unsichtbar - fast das ganze gesellschaftliche und wirtschaftliche Leben in den Industrieländern:

- Fast jeder Arbeitsschritt in der industriellen Entwicklung und Produktion wird elektronisch geplant, gesteuert oder überwacht.
- Der Zahlungsverkehr findet in weiten Bereichen bargeldlos, das bedeutet computergesteuert statt.
- War bislang schon ein Großteil unserer Kommunikationssysteme (Telephon, Radio, Fernsehen usw.) elektrifiziert, so wird nun die Nutzung des Internets als computergestütztes Kommunikationsmittel immer populärer.
- Die meisten modernen naturwissenschaftlichen Forschungsbereiche, z.B. Molekularbiologie, Gentechnik, Atomphysik, Aerodynamik usw. wären ohne Computerunterstützung nicht mehr denkbar.[301]

---

[299] vgl. Wußing 1989: S. 301ff
[300] vgl. Wußing 1989: S. 303ff
[301] vgl. King und Schneider 1993: S. 57ff

1.3.8.2 Die Informationsgesellschaft

Der „Club of Rome“ ist ein Gremium, das sich derzeit aus 100 „unabhängigen“ Denkern aus 53 Ländern zusammensetzt. 1968 ins Leben gerufen, hat er es sich zur Aufgabe gemacht, die Menschheitsprobleme der Gegenwart zu analysieren und durch Publikationen darauf aufmerksam zu machen. In dem 1991 vom „Club of Rome“ herausgegebenen Buch: „Die erste globale Revolution“ findet sich auch ein Unterkapitel zur Informationsgesellschaft.[302] Die Informationsgesellschaft ist danach im Begriff, die in der Folge der Industrialisierung entstandenen Gesellschaftsformen abzulösen. Sie wird gekennzeichnet durch die wirtschaftlichen, sozialen und politischen Veränderungen, die die eben beschriebene Durchdringung unserer Gesellschaft mit Mikroelektronik vermutlich mit sich bringen wird:[303]

- Durch die zunehmende Verbreitung von Mikroprozessoren werden immer mehr Gebrauchsgegenstände zu „Black Boxes“. Der Durchschnittsmensch kann sie zwar benutzen, weiß aber nicht, wie sie funktionieren.[304]
- „Auch in der Informationsgesellschaft wird die Industrie weiter florieren, doch wird sie ihre Erzeugnisse mit einem viel kleineren Teil des Arbeitskräftepotentials produzieren als in der Glanzzeit des Industriezeitalters. Die Mehrheit wird in der informationsverarbeitenden Industrie und im Dienstleistungssektor beschäftigt sein - eine Entwicklung, die bereits weit fortgeschritten ist.“[305]
- Vermutlich wird es in Zukunft möglich sein, „mit einem Bruchteil der heute aufgewendeten körperlichen Arbeit alle Bedürfnisse eines Landes - industrielle Produktion, Landwirtschaft, Verteidigung, Gesundheitsversorgung, Bildung und Soziales - zu decken und jedem Bürger einen angemessenen Lebensstandard zu sichern.“[306]
- Es ist noch unklar, ob die Arbeitsplätze, die, durch Automatisierung und Rationalisierung, vor allem in der Fertigungsindustrie wegfallen werden, durch Arbeitsplätze im Bereich der neuen Technologie und im Dienstleistungssektor vollständig aufgefangen werden können, zumal auch im Dienstleistungssektor Rationalisierungs- und Automatisierungsbestrebungen im Gang sind.[307] Das Prinzip der Vollbeschäftigung, auf der unser derzeitiges Sozialwesen aufbaut, steht damit in Frage.[308]
- Um die in Zusammenhang mit der strukturbedingten zunehmenden Arbeitslosigkeit entstehenden Probleme zu lösen, ist eine Neubewertung moralisch und historisch befrachteter Begriffe wie „Beschäftigung, Arbeitslosigkeit, Unterbeschäftigung und Freizeit“[309] notwendig. Neue Beschäftigungsformen, die der Gesellschaft nutzen und dem einzelnen persönliche Erfüllung bieten, müssen entwickelt werden.[310] „Der neue Ansatz muß dem Willen der Gesellschaft selbst entspringen und wird tiefgreifende Veränderungen im Bildungssystem und bei der Verteilung des Wohlstandes

[302] vgl. King und Schneider 1993: S. 9ff
[303] vgl. King und Schneider 1993: S. 84
[304] vgl. King und Schneider 1993: S. 87
[305] King und Schneider 1993: S. 85
[306] King und Schneider 1993: S. 86
[307] Es gab Zeiten, in denen man zum Geldabheben an den Bankschalter ging, auch wenn der Bankautomat gerade nicht kaputt war.
[308] King und Schneider 1993: S. 88f
[309] King und Schneider 1993: S. 90
[310] vgl. King und Schneider 1993: S. 90

mit sich bringen.“[311]

Die neueren Entwicklungen in der Technologie werden unsere Gesellschaft und auch den Lebensstil des Einzelnen grundlegend verändern - soviel ist abzusehen. Beim Übergang zur griechischen Antike und zur Renaissance gingen die gesellschaftlichen Veränderungen, wie ich weiter oben erläutert habe, Hand in Hand mit Veränderungen in der Denkweise der Menschen. Ob auch die augenblickliche Entwicklung einen Wandel in der Art und Weise, wie wir denken und die Welt sehen, mit sich bringen wird, bleibt abzuwarten.

1.3.8.3 Entwicklungen in der Wissenschaft

Zu Anfang des 19. Jahrhunderts griff der Physiker und Chemiker John Dalton die schon in Griechenland vertretene Atomtheorie wieder auf, die bald darauf durch die Ausarbeitung der Thermodynamik und der kinetischen Gastheorie gestützt wurde. Aber erst am Ende des 19. Jahrhunderts begannen sich Physiker in größerem Umfang mit Teilchenphysik zu beschäftigen. Die Radioaktivität des Urans wurde entdeckt, die Existenz des Elektrons nachgewiesen und Max Planck stellte bei der Untersuchung der Strahlungsverhältnisse schwarzer Körper fest, daß Energie in Form endlicher, bestimmter Energiequanten aufgenommen und abgegeben wurde. Damit waren die Grundlagen für die Atom- und Quantenphysik gelegt, die sich in der Folgezeit stürmisch entwickelten. Die klassische Physik, in der man von der grundsätzlichen Kontinuität aller Naturvorgänge ausgegangen war und in der Atome nur als Hilfsvorstellungen gedient hatten, wurde nun nach und nach abgelöst. Dazu trug die von Albert Einstein entwickelte Relativitätstheorie entscheidend bei, nach der Raum und Zeit die von Newton als absolute Größen angesehen wurden, nur noch relativ zum Bezugssystem des Beobachters bestimmbar sind.[312] In der klassischen Physik ging man außerdem von einem deterministischen Weltbild aus. Man glaubte, wenn man sämtliche Zustandsgrößen eines Systems exakt definieren und durch Messung genau bestimmen könnte, wären sämtliche künftigen Zustände des Systems errechenbar. Die von Werner Heisenberg entwickelte Unschärferelation, nach der ein physikalischer Zustand nie eindeutig gegeben ist, zeigt die prinzipielle Unmöglichkeit eines solchen Unterfangens. Auf diese Weise fanden der Zufall und die Wahrscheinlichkeitsrechnung Eingang in die moderne Physik.

Sowohl bei der Ausarbeitung der Quanten- und Teilchenphysik, als auch bei der Ausarbeitung der Relativitätstheorie konnten die Physiker auf bereits vorhandene mathematische Theorien zurückgreifen, die entwickelt worden waren, ohne daß an einen möglichen Realitätsbezug gedacht worden wäre. In der Quantenphysik wurde die Theorie der Hilberträume verwendet, in der Teilchenphysik wurde auf die Gruppentheorie zurückgegriffen und Einstein verwendete für seine Relativitätstheorie die nichteuklidische Geometrie und das Tensorkalkül.[313] Diese Tatsache wurde von Vertretern der „reinen“ Mathematik vielfach als Beleg der gesellschaftlichen Relevanz ihrer Tätigkeit angeführt: durch ihre Art Mathematik zu treiben würden sie sozusagen einen

[311] King und Schneider 1993: S. 90
[312] vgl. Willer 1990: S. 224f
[313] vgl. Barrow 1993: S. 17

Vorrat potentieller Werkzeuge für die Wissenschaft bereitstellen.[314]

Im folgenden gerieten nicht nur die Erkenntnisse der klassischen Physik, sondern auch ihre auf Galilei zurückgehende Methode, mit der man in den vergangenen dreihundert Jahren fast Unvorstellbares erreicht hatte, immer mehr in die Kritik. Diese Methode war inzwischen zum sogenannten logischen Empirismus verfeinert worden, der durch vier Vorgehensschritte charakterisiert wird:

- In einem ersten Schritt beobachtet oder mißt man etwas und sammelt auf diese Weise Daten und Informationen.
- In einem zweiten Schritt wird eine Theorie aufgestellt, die die gemachten Beobachtungen möglichst einfach erklärt.
- Drittens wird aus dieser Theorie abgeleitet, welche weiteren Beobachtungen möglich sein sollten.
- Viertens wird schließlich untersucht, ob sich diese Beobachtungen tatsächlich machen lassen und die Theorie auf diese Weise entweder erhärtet oder widerlegt.

Diese Methode wird als logischer Empirismus bezeichnet, weil Schritt eins und vier sich auf empirische Beobachtungen stützen, während der Übergang von Schritt zwei zu Schritt drei mittels logischer Deduktion erfolgt. Die in Schritt zwei entwickelte Theorie wird in der Regel mathematisch ausgedrückt, so daß die Ableitung von Voraussagen über weitere Beobachtungen streng formallogisch erfolgen kann.[315]

Ein Hauptkritikpunkt wendet sich gegen den vierten Schritt des logischen Empirismus, in dem aus der Theorie gewonnene Voraussagen entweder bestätigt oder widerlegt werden sollen. Der eine Fall ist relativ einfach: widersprechen die Beobachtungen, die man macht, den Vorhersagen der Theorie und können sie nicht auf Verfahrensfehler zurückgeführt werden, so muß die Theorie verworfen werden. Im anderen Fall, wenn die Beobachtungen den Vorhersagen, die aus der Theorie folgen, entsprechen, ist die Sache schon schwieriger. Damit kann die Theorie zwar erhärtet, aber niemals endgültig bestätigt werden, da möglicherweise zu einem späteren Zeitpunkt Beobachtungen gemacht werden könnten, die den Vorhersagen der Theorie widersprechen. Das bedeutet, die Methode des logischen Empirismus hat den schweren prinzipiellen Mangel, daß sich mit ihrer Hilfe zwar falsche Theorien zum Teil widerlegen, aber niemals Theorien letztendlich verifizieren lassen.[316]

[314] vgl. Volk 1984: S. 100f
[315] vgl. Hayward 1996: S. 31f
[316] vgl. Hayward 1996: S. 35f

Weitere Einwände gegen den logischen Empirismus führen Kognitionspsychologen und Neurobiologen ins Feld. In den letzten Jahrzehnten hat sich die These erhärtet, daß Wahrnehmung ein Prozeß ist, bei dem das, was wir als Wirklichkeit ansehen, nicht passiv abgebildet, sondern aktiv aufgebaut wird. Ich werde auf diesen Punkt im Abschnitt „2.1.4 Die konstruktivistische Alternative" meiner Arbeit noch ausführlich eingehen. So kommt es, daß unsere Beobachtungen von dem geprägt werden, was wir schon zu Wissen glauben - von den Theorie, die wir schon haben. Das kann so weit gehen, daß bestimmte Beobachtungen einfach nicht akzeptiert werden, weil sie den herrschenden Theorien widersprechen. So wurden zum Beispiel schon zur Zeit Newtons Beobachtungen gemacht, die die Deutung des Lichts als Wellenphänomen nahelegten. Mit der Begründung, daß das unmöglich so sein könne und wohl ein Fehler unterlaufen sei, wurden diese Experimente über hundert Jahre lang ignoriert.[317] „Weiterhin fließt durch die Begriffe, mit denen wir unsere Beobachtung beschreiben, eine weitere theoretische und subjektive Färbung in unsere angeblich objektive Beobachtung ein. Selbstverständlich ist die Bedeutung von Theoriebegriffen theoriebefrachtet, aber das gilt eben auch für rein deskriptiv gemeinte Begriffe."[318] Schließlich hat der logische Empirismus noch das Problem, daß er überhaupt nicht das beschreibt, was Wissenschaftler tatsächlich tun, sich also nach seinen eigenen Kriterien selbst widerlegt.[319]

Trotz all dieser Zweifel an der Methode des logischen Empirismus wird nach wie vor erfolgreich Wissenschaft betrieben, wobei vor allem der Einsatz des Computers erheblichen Vorschub geleistet hat. Er erlaubte es der Wissenschaft, sich ganz neuer Gebiete und Phänomene anzunehmen. „Solange die Wissenschaftler ohne einfache, interaktive Computer arbeiteten, tendierten sie dazu, einfache, symmetrische und lösbare Auswirkungen der Naturgesetze zu untersuchen, denn die asymmetrischen Ereignisse sind im allgemeinen einfach zu kompliziert. Die Computer aber erlauben uns, solche vertrackteren Ereignisse zu simulieren und experimentell zu untersuchen."[320] Auf diese Weise wurden z.B. die Chaosforschung und in ihrer Folge die mathematische Chaostheorie möglich. „Chaotische Systeme sind schlicht solche, die sehr sensibel auf sehr kleine Änderungen reagieren. Wird der Status eines chaotischen Systems sehr leicht verändert, so wird es sich in kürzester Zeit in völlig anderer Weise verhalten, als wenn es nicht gestört worden wäre. Viele wohlbekannte Dinge verhalten sich so: das Wetter, das Wirtschaftssystem, das ökologische Gleichgewicht und menschliche Beziehungen."[321]

Vielfach wurde es durch den Einsatz des Computers auch möglich, konventionelle Experimente durch Computersimulationen zu ersetzen. Diese haben den großen Vorteil, daß sie meist billiger sind und vor allem flexibel gestaltet und viel leichter abgeändert werden können. Bei der Konstruktion von Flugzeugteilen im Windkanal muß beispielsweise bei jeder Veränderung ein neues Modell hergestellt werden. Arbeitet man

[317] vgl. Hayward 1996: S. 36ff
[318] Hayward 1996: S. 37
[319] vgl. Hayward 1996: S. 35
[320] Barrow 1993: S. 87
[321] Barrow 1993: S. 87

mit einer Computersimulation, so müssen lediglich einige Parameter geändert werden. Auch der Bedarf an mathematischen Modellen für derartige Simulationen hat die Mathematik nachhaltig beeinflußt.[322] Barrow schreibt in diesem Zusammenhang sogar: „Ich glaube, daß wir in der Zukunft erleben werden, wie diese neue Art mathematischer Arbeit die gesamte Mathematik bis hin in die entferntesten Bereiche der reinen Mathematik beeinflussen wird."[323]

1.3.8.4 Entwicklungen in der Mathematik

Im 20. Jahrhundert wurde eine große Zahl bereits vorhandener mathematischer Gebiete weiterentwickelt. Zu nennen sind hier vor allem die moderne Algebra, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Funktionsanalysis, Logik und Topologie. Die moderne Algebra wurde in den ersten beiden Jahrzehnten dieses Jahrhunderts durch die axiomatische Fassung von Begriffen wie „Gruppe", „Körper" und „Ring" begründet. Die bereits erwähnte Gruppe Bourbaki hat im folgenden viel zum Ausbau der Algebra beigetragen. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik erlangten in neuerer Zeit, zum einen in Verbindung mit der Entwicklung in der Quantenphysik, zum anderen im Zusammenhang mit der Auswertung wirtschaftlicher und gesellschaftlicher Vorgänge, immer größere Bedeutung.

Es entstanden aber in engem Anwendungsbezug auch einige neue Teilgebiete der Mathematik, die sich inzwischen teilweise zu eigenständigen wissenschaftlichen Disziplinen entwickelt haben. Hierzu gehört die Chaostheorie ebenso wie die gesamten Bereiche der Kybernetik und der Informatik, deren Bedeutung für die Wissenschaft ich eben schon angesprochen habe. Aber auch Spieltheorie, Lineare Optimierung und die Theorie des Operational Research entstanden und trugen viel dazu bei, die immer komplexeren Organisationsformen und die immer größeren Datenmengen, die mit der Zeit anfielen, handhabbar zu machen.[324]

Wie sich an dieser Vielzahl von parallel ablaufenden Entwicklungen erkennen läßt, ist auch die zunehmende Spezialisierung und die Aufsplitterung in Einzeldisziplinen eine Tendenz, die sich in der heutigen Mathematik abzeichnet. Möglich wurde sie unter anderem durch die verschiedenen Versuche die Mathematik neu zu strukturieren, wie sie im Rahmen des „Grundlagenstreites" stattgefunden hatten. Vor allem die formale Mathematik erlaubte es den Mathematikern, eine ungeheure Produktivität zu entwickeln, weil formal-mathematische Theorien weder in ihrer Entwicklung von der Wirklichkeit abhingen, noch durch sie widerlegt werden konnten. Diese Produktivitätssteigerung hatte allerdings auch ihre Schattenseiten.[325] „Kein Mathematiker kann heute mehr Forschungsarbeit in allen mathematischen Teilgebieten leisten; mehr noch, er ist auch nicht in der Lage, die Entwicklung der Mathematik außerhalb seines eigenen und einiger benachbarter Spezialgebiete passiv zu verfolgen. Diese fehlende Übersicht und die Notwendigkeit, den wachsenden Wissensberg zu strukturieren, führten und führen

[322] vgl. Barrow 1993: S. 88 und Wußing 1997: S. 64
[323] Barrow 1993: S. 88
[324] vgl. Wußing 1997: S. 62f
[325] vgl. Kotzmann 1988: S. 8 und Volk 1984: S. 99

zu weiteren Verästelungen in der Mathematik.“[326] Das ist sicherlich auch ein Grund dafür, daß die Zahl der mathematischen Publikationen ständig ansteigt. Ein anderer Grund ist, daß jeder, der im heutigen akademischen Betrieb vorwärts kommen, oder auch nur seine Position behaupten will, gezwungen ist zu publizieren.[327] „Das Resultat ist eine Flut von Publikationen, deren Qualität oft zweifelhaft ist - derzeit hält man bei ca. 200.000 neuen mathematischen Theoremen pro Jahr.“[328]

Und die Zukunft? - Süffisant bemerkt Bernd Windmann im Zusammenhang mit einem Vergleich von Bevölkerungszahl und der Anzahl bedeutender Mathematiker im Lauf der Geschichte: „Der offensichtliche Trend scheint darauf hinzuweisen, daß in Zukunft die Anzahl der bedeutenden Mathematiker schneller wächst als die Bevölkerung. Wann beide gleichziehen werden ist noch offen.“[329]

---

[326] Kotzmann 1988: S. 8
[327] vgl. Kotzmann 1988: S. 8
[328] Kotzmann 1988: S. 8f
[329] Windmann 1996: S. 24

1.4 Mathematik und Anwendung[330]

1.4.1 Angewandte und „reine“ Mathematik in der geschichtlichen Entwicklung

1.4.1.1 Vorgeschichtliche Zeit

Bei meinen Ausführungen über den Ursprung der Mathematik war ich vielfach auf Vermutungen angewiesen; es ließen sich aber doch zahlreiche Indizien dafür finden, daß die Entwicklung in ähnlicher Weise stattfand, wie ich sie beschrieben habe. Ist dies zutreffend, dann bildete sich die Mathematik von Anfang an in einem steten Spannungsfeld von Anwendungsbezug und reinem Erkenntnisstreben heraus. Das legt es nahe, hier von zwei Aspekten der Mathematik zu reden, von denen im Lauf der Geschichte mal der eine und mal der andere im Vordergrund stehen sollte.

Schon in den beiden Wurzeln, aus denen heraus die Mathematik vermutlich entstand, kann man diese beiden Aspekte sehr schön wiedererkennen. Den Anwendungsaspekt finden wir im bewußten Vorgang des Zählens, das sich nach und nach aus einem *Zahlgefühl* heraus entwickelt hat - der auch bei Tieren nachweisbaren Fähigkeit Ansammlungen von Dingen in einem gewissen Rahmen der Anzahl nach unterscheiden zu können. Durch das Zählen erlangte der Mensch die Fähigkeit, aus seiner Umwelt Strukturen zu *abstrahieren*, was ihm erlaubte, die Welt, in der er lebte, besser zu beherrschen. Das Streben nach Erkenntnis hingegen finden wir in der Entwicklung der Mathematik aus dem magischen Ritual heraus wieder. Auch hier zeigt sich der Wunsch des Menschen, die Welt zu kontrollieren. Dabei steht aber nicht so sehr der Versuch im Vordergrund einer an und für sich ungeordneten Welt die eigene Struktur aufzuprägen, wie im Fall des Zählens. Es geht vielmehr in erster Linie darum, die verborgenen, auf den ersten Blick nicht sichtbaren Gesetze, nach denen die Welt funktionierte, zu entdecken - um es mit Faust zu sagen - zu erkennen, „was die Welt im Innersten zusammenhält [...].“[331]

1.4.1.2 Zeit der frühen Hochkulturen

In den frühen Hochkulturen konnte sich aufgrund dieser, bereits in vorgeschichtlicher Zeit entstandenen Grundlagen, eine reiche algorithmische Mathematik entwickeln. Es gibt Autoren, die der Ansicht sind, daß ein gewisses Maß an mathematischem Wissen notwendig war, damit komplexe Gemeinwesen dieser Größe überhaupt organisiert werden konnten.[332] In diesen Hochkulturen stand, mit wenigen Ausnahmen, der Anwendungsaspekt der Mathematik stark im Vordergrund und es läßt sich gut nachvollziehen, wie die Mathematik in den verschiedenen Kulturen in Abhängigkeit von den regionalen Gegebenheiten verschiedene Schwerpunkte entwickelte. Dabei wurden ma-

[330] Beim folgenden Abschnitt meiner Arbeit handelt es sich teilweise um eine Zusammenfassung der vorigen Abschnitte unter neuen Gesichtspunkten. Ich verzichte daher darauf, bereits Belegtes noch einmal zu belegen.
[331] Goethe 1967: S. 13
[332] vgl. Kotzmann 1988: S. 5f

thematische Methoden zur Lösung von Problemen angewandt, ohne über sie zu reflektieren oder den Versuch zu unternehmen, sie zu beweisen. Ihre Berechtigung erhielten sie aus der Tatsache, daß sie funktionierten, in dem Sinne, daß sie zum gewünschten Ergebnis führten.

1.4.1.3 Griechische Antike

Mit der *ionischen Periode* der griechischen Kultur gewinnt das von der Anwendung weitgehend unabhängige Erkenntnisstreben wieder mehr an Bedeutung. Zum ersten Mal wurden hier mathematische Gegenstände definiert und Sätze bewiesen. Diese Epoche wurde stark geprägt vom Geheimbund der Pythagoräer, die in ihren Ansichten der mystisch-magischen Wurzel der Mathematik sehr nahe standen. So war das Ziel der pythagoräischen Mathematik auch nicht Naturbeherrschung, sondern das Einswerden mit dem Göttlichen durch Einsicht in mathematische Zusammenhänge. Auch während der *athenischen Periode* stand der Erkenntnisaspekt der Mathematik im Mittelpunkt des Interesses. Platon entwickelte mit seiner Ideenlehre die dazu passende Philosophie. Mathematik war für ihn ein Mittel, das dem Streben nach metaphysischer Erkenntnis diente - auf die Anwendung hin ausgerichtete Mathematik sah er als minderwertig an. Mit Euklids „Elementen" erreichte die „reine" Mathematik in der *hellenistisch / alexandrinischen Periode* ihre vorläufig höchste Blüte. Gleichzeitig kam in dieser Zeit die anwendungsorientierte Mathematik wieder mehr zu ihrem Recht. Archimedes beispielsweise leistete Großartiges indem er Mathematik und Anwendung miteinander verband und Heron betonte ausdrücklich die Bedeutung der Anwendung für die Entwicklung der Mathematik. Nach dem Niedergang der antiken griechischen Kultur, und des sie beerbenden römischen Reiches, blieben in Europa nur relativ bescheidene mathematische Kenntnisse, die sich auf einfache Anwendungen wie Feldvermessung und kalendarische Berechnungen bezogen.

1.4.1.4 Mittelalter und Renaissance

Die folgenden Jahrhunderte waren in Europa von den Wirren der Völkerwanderung gekennzeichnet. Fast das ganze mathematische Wissen in Europa ging verloren. Erst mit dem wiederaufblühenden Handel konnte ein Teil des antiken Wissens über die islamischen Länder wieder nach Europa gelangen. In dieser Zeit stand vor allem das Rechnen im Vordergrund, das im Handel seine Anwendung fand. Diese Entwicklung setzte sich in der Renaissance mit den sogenannten Rechenmeistern fort. Sie führten zum einen Rechenarbeiten für die öffentliche Verwaltung aus und unterhielten zum anderen Rechenschulen, in denen sie Rechnen in Zusammenhang mit Problemen des täglichen Lebens lehrten. Aus der Tätigkeit der anwendungsbezogen arbeitenden Rechenmeister entwickelte sich eine Gleichungslehre, die immer mehr auch an Universitäten betrieben wurde, wo ihr Anwendungsbezug in den Hintergrund trat.

1.4.1.5 Barock und Aufklärung

Auch im Barock dominierte der Anwendungsaspekt der Mathematik. Der Schwerpunkt lag aber nun nicht mehr so sehr auf der Anwendung im täglichen Leben und im Handel, sondern auf der Anwendung in den sich rasant entwickelnden Naturwissenschaften. Das Bedürfnis der Naturwissenschaften nach mathematischen Modellen, vor allem für die Darstellung von Bewegungen, stieß die Entwicklung der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung an. Gleichzeitig erlangte die Kegelschnittslehre, die in der Antike frei jeden Anwendungsbezuges entwickelt worden war, Bedeutung für die Beschreibung der Planetenbahnen.

1.4.1.6 Das Zeitalter der Industrialisierung

Durch die Erfindung der Dampfmaschine wurde die industrielle Revolution ausgelöst. Zur Industrialisierung Europas wurde eine große Zahl von Ingenieuren mit anwendungsorientierten mathematischen und naturwissenschaftlichen Kenntnissen benötigt. Dadurch entstand das Bedürfnis, die Mathematik besser lehr- und darstellbar zu machen. Das wiederum setzte voraus, Definitionen und Begriffe zu klären und eine einheitliche Terminologie zu entwickeln. Besonders auf dem Gebiet der Infinitesimalrechnung, die ihre Rechtfertigung bisher vor allem darin gefunden hatte, daß sie praktisch verwertbare Ergebnisse lieferte, herrschte Klärungsbedarf. So entstand zunächst aus sehr pragmatischen Gründen heraus die mathematische Grundlagenforschung, die sich ausschließlich mit innermathematischen Problemen beschäftigte. Durch die Spezialisierung von Mathematikern auf den Bereich der Anwendung bzw. der Grundlagenforschung kam es zu einer Spaltung in angewandte und „reine“ Mathematik, die nicht praktisch, sondern nur ideologisch begründbar ist. Im folgenden gewann durch die zunehmende Technisierung die angewandte Mathematik ständig an Bedeutung; aber auch in der Grundlagenforschung wurden große Fortschritte gemacht.

1.4.1.7 Industriezeitalter bis heute

In Folge der Beschäftigung mit dem Aktual-unendlichen, der Entwicklung der Mengenlehre und der Entdeckung der Antinomien kommt es in der „reinen“ Mathematik zur sogenannten Grundlagenkrise und dem daraus hervorgehenden Grundlagenstreit. Dadurch entstehen verschiedene mathematische Schulen, von denen sich bis heute keine durchsetzen konnte. Das hinderte die Mathematiker jedoch nicht daran, die Mathematik auch inhaltlich weiterzuentwickeln, z.B. auf dem Gebiet, der Algebra, der Funktionsanalyse oder der Logik. Aber auch auf dem Gebiet der angewandten Mathematik tat sich einiges. Im Zusammenhang mit gesellschaftlichen, wissenschaftlichen und technischen Entwicklungen entstanden hier neue Forschungsbereiche wie: Informatik, Kybernetik, Spieltheorie und Operational Research. Obwohl es zwischen den hier genannten Gebieten angewandter und „reiner“ Mathematik viele Berührungspunkte und Überschneidungen gibt, besteht die Trennung in angewandte und „reine“ Mathematik nach wie vor, was sich unter anderem daraus ersehen läßt, daß es dafür an Universitäten immer noch getrennte Lehrstühle und Institute gibt.[333]

1.4.2 Kampf um die Vorherrschaft

Bisher habe ich gezeigt, daß der Aspekt des Anwendungsbezuges und der Aspekt des Erkenntnisstrebens die Mathematik von Anfang an durchdrungen haben. Zwar glaubten bereits in Griechenland einige Mathematiker, die sich mit der „reinen" Mathematik beschäftigten, sie seien etwas besseres als diejenigen, die die Mathematik um der Anwendung willen betrieben[334] - zu einer wirklichen Spaltung in *die* angewandte und *die* „reine" Mathematik kam es jedoch erst in Folge der industriellen Revolution zu Anfang des 19. Jahrhunderts. Da diese Spaltung, die meiner Ansicht nach hauptsächlich ideologischer Natur ist, noch immer aufrecht erhalten wird, möchte ich im folgenden die Argumente beider Lager für ihren Standpunkt zusammenfassen. Um die Unterschiede zwischen den beiden Sichtweisen deutlich zu machen, werde ich dabei relativ pauschal von den „reinen" und den angewandten Mathematikern reden. Tatsächlich werden beide Standpunkte nicht immer in der von mir dargestellten extremen Form vertreten und es gibt etliche Abstufungen.[335]

1.4.2.1 Die Argumente der „reinen" Mathematiker

Den Standpunkt der Vertreter einer „reinen" Mathematik kann man folgendermaßen zusammenfassen: Die Mathematik ist eine eigengesetzliche Wissenschaft, die um ihrer selbst Willen betrieben wird. Sie befaßt sich nicht mit den außermathematischen Anwendungen der Mathematik.[336] Weil sie sich nicht mit den empirischen Unbillen anderer Wissenschaften abplagen muß, sondern sich ausschließlich mit „geistigen" Gegenständen beschäftigt, stellt sie die höchste Leistung des menschlichen Intellekts dar. Die „reinen" Mathematiker führen drei Arten von Argumenten für ihren Standpunkt an: Argumente, die sich auf den persönlichen Nutzen beziehen, der einem aus dem Betreiben reiner Mathematik erwächst; Argumente, in denen der Nutzen für die Entwicklung der Mathematik im Vordergrund steht; und Argumente, die sich auf den gesellschaftlichen Nutzen der Mathematik beziehen. Es gibt aber auch „reine" Mathematiker, die eine Bedeutung der „reinen" Mathematik für die Gesellschaft bestreiten, ich habe diese Einstellung am Fall G. H. Hardys bereits geschildert. Die letzte Argumentationsschiene ist deswegen wohl auch als Antwort auf Angriffe zu sehen, denen „reine" Mathematiker sich immer wieder ausgesetzt sahen.

Im Zusammenhang mit dem persönlichen Nutzen, den sie aus der „reinen" Mathematik ziehen, führen die „reinen" Mathematiker hauptsächlich die Schönheit der Mathematik an, und die Freude, die sie ihnen dadurch bereitet. G. H. Hardy versucht diese Einstellung zusätzlich mit der Einforderung eines Rechtes auf Selbstverwirklichung zu stüt-

[333] vgl. Thiel 1995: S. 34
[334] vgl. Wußing 1989: S. 55
[335] vgl. Beck 1979 S. 76f
[336] Beck 1979: S. 76

zen.[337] Der Mathematiker John von Neumann arbeitet den ästhetischen Aspekt der Mathematik sehr schön heraus: „Der Mathematiker verfügt über eine große Auswahl an Gebieten, mit denen er sich befassen kann, und es steht ihm nahezu vollkommen frei, was er mit ihnen machen will. Und nun das Entscheidende: Ich glaube, es ist richtig, wenn man sagt, daß seine Auswahl - und auch seine Erfolgskriterien in der Hauptsache ästhetischer Natur sind. [...] Von einem mathematischen Lehrsatz oder einer mathematischen Theorie erwartet man nicht nur, daß mit ihrer Hilfe zahlreiche, a priori miteinander nicht zu vereinbarende Spezialfälle auf einfache und elegante Weise beschrieben und klassifiziert werden können, sondern man erwartet auch 'Eleganz' in ihrem 'architektonischen' Aufbau. Leichtes Aufstellen des Problems, große Schwierigkeiten, es in den Griff zu bekommen und bei allen Versuchen, sich ihm zu nähern, dann wieder irgendeine sehr überraschende Wendung, durch die die Behandlung des Problems oder ein Teil davon leicht wird usw. Auch sollte, wenn die Deduktionen langwierig oder kompliziert sind, ein einfaches, allgemeines Prinzip involviert sein, welches die Schwierigkeiten und Umwege erklärt, die offensichtliche Willkür auf wenige, einfache Leitmotive reduziert usw. Bei diesen Kriterien handelt es sich eindeutig um diejenigen einer schöpferischen Kunst [...].“[338] Besonders in den Hochperioden der „reinen“ Mathematik, in der griechischen Antike und in der Zeit nach der industriellen Revolution, schlossen sich viele Mathematiker dieser Sichtweise an. Zu nennen sind hier unter anderen: Aristoteles, Proklos, Poincare, Hamilton, von Neumann und Hardy.[339]

Das Betreiben „reiner“ Mathematik ist aber nicht nur für den „reinen“ Mathematiker selbst von Nutzen. Auch die Mathematik als Wissenschaft profitiert davon. Durch die Entdeckung der Antinomien der Mengenlehre wurde das Vertrauen in die Zuverlässigkeit mathematischer Verfahren in Frage gestellt. Die formale Mathematik, die auf jeden Anwendungsbezug verzichtet, bietet, nach Ansicht „reiner“ Mathematiker, eine Möglichkeit, diese Widersprüche zu vermeiden und so das Vertrauen in die Mathematik wieder herzustellen.[340]

Ein weiteres Argument, das von „reinen“ Mathematikern angeführt wird, kann sowohl als nützlich für die Mathematiker, als auch für die Mathematik gedeutet werden: In der „reinen“ Mathematik lassen sich praktisch unbegrenzt neue Forschungsgebiete erschließen und bereits bestehende Forschungsgebiete erweitern, weil rein mathematische Theorien weder in ihrer Entwicklung von der Wirklichkeit abhängen, noch an ihr scheitern können. Das unterscheidet sie von Theorien der empirischen Naturwissenschaft, die auf Grund von Beobachtungen entwickelt werden, - und verworfen werden müssen, wenn Beobachtungen auftreten, die ihnen widersprechen. So geht zum einen

[337] vgl. Beck 1979: S. 81f.
[338] Neumann 1974: S. 44f
[339] vgl. Beck 1979: S. 78f
[340] vgl. Volk 1984: S. 98

den Mathematikern nie die Arbeit aus und zum anderen kann das mathematische Wissen ständig erweitert werden.[341]

Schließlich argumentieren einige der „reinen“ Mathematiker noch damit, daß sie durch ihre Arbeit mathematische Modelle auf Vorrat erstellen, die auf irgendwelche, bislang noch unbekannten Anwendungen passen könnten. Sie stellen sozusagen „potentielle Werkzeuge“ zur Verfügung, die sich von großem Nutzen für die Gesellschaft erweisen könnten.[342] Gestützt wird diese These damit, daß Vergleichbares in der Mathematikgeschichte schon etliche Male vorgekommen ist. Ich möchte hier nur nochmals auf die Anwendung der Kegelschnittslehre bei der Beschreibung der Planetenbewegungen durch Kepler, oder die nicht-euklidische Geometrie als mathematischer Hintergrund für Einsteins Relativitätstheorie hinweisen.[343]

1.4.2.2 Die Argumente der anwendungsorientierten Mathematiker

Ich habe bereits weiter oben auf die Schwierigkeit hingewiesen, die Position der anwendungsorientierten Mathematiker zu fassen, weil sie selten explizit vertreten wird. Das liegt in der Natur dieses Standpunktes. Mathematik wird als Handwerkszeug angesehen, das allein an seiner Nützlichkeit gemessen wird. Am nützlichsten ist ein mathematisches Werkzeug natürlich dann, wenn es schon als fertig ausgearbeitetes Lösungsmodell vorliegt, das man nur noch auf das zu lösende Problem anwenden muß. Weitere Motive für die Auseinandersetzung mit Mathematik gibt es für die meisten anwendungsorientierten Mathematiker nicht, so daß ihnen auch die Auseinandersetzung mit dem Standpunkt der „reinen“ Mathematikern ziemlich egal sein oder allenfalls als kurios erscheinen dürfte. Neben diesem pragmatisch-indifferenten Standpunkt gibt es jedoch in der Auseinandersetzung zwischen „reiner“ und angewandter Mathematik noch eine Position, die das sorglose Treiben der „reinen“ Mathematiker sehr hart angreift. Zu den Vertretern dieser Position gehört beispielsweise der Mathematikdidaktiker Dieter Volk. Schaut man sich seine Argumentation näher an, so zeigt sich, daß sie einige Thesen über das menschliche Handeln und das Betreiben von Wissenschaft implizit voraussetzt. Die wichtigsten dieser Voraussetzungen lassen sich so zusammenfassen:

- Menschliches Handeln im allgemeinen und wissenschaftliches im Besonderen sollte Zweckgerichtet sein.[344]
- Die Zwecke, auf die es ausgerichtet ist, sollten rational begründbar sein.[345]
- Wissenschaft sollte zum Nutzen der Gesellschaft betrieben werden. Wird sie zu anderen Zwecken oder angeblich zweckfrei betrieben, so ist sie unmoralisch.[346]

Durch die wiederholte implizite Verwendung dieser Voraussetzungen bei der Argu-

[341] vgl. Volk 1984: S. 99
[342] vgl. Volk 1984: S. 100f
[343] vgl. Barrow 1993: S. 17
[344] „Wissenschaft ist ein Handlungssystem; wie jedes andere Handlungssystem kann es sich nicht begründungsfrei, d.h. nicht moralfrei (nicht praxisfrei, nicht politikfrei) konstituieren. Die Auswahl von Strukturen (und das hantieren mit Strukturen) ist Handeln; es bedarf der Orientierung und der Begründung.“ (Volk 1984: S. 79)
[345] vgl. z.B. Volk 1984: S. 79
[346] vgl. z.B. Volk 1984: S. 88 und S. 96

mentation soll vermutlich suggeriert werden, sie seien allgemein anerkannt und bedürften keiner weiteren Begründung. Ich halte das für höchst zweifelhaft. Hätten die Menschen immer erst nach einem Zweck und nach einer Begründung für ihr Handeln gesucht, bevor sie etwas taten, dann gäbe es heute mit Sicherheit weder die Mathematik noch sonst eine Wissenschaft. Seit sich die Psychologie in der Nachfolge von Freud mit der Erforschung des Unbewußten beschäftigt, sollte außerdem klar sein, daß menschliches Handeln oft ganz anderen Zwecken dient, als denen, auf die es vorgeblichen ausgerichtet ist. Und daß Wissenschaft zum Nutzen der Gesellschaft betrieben wird, ist zwar ein frommer Wunsch, aber sicher keine, in irgendeiner Wissenschaft beobachtbare Tatsache. Das Handeln „reiner" Mathematiker an einem frommen Wunsch zu messen, wie das in Volks Argumentation geschieht, halte ich für nicht gerechtfertigt. Ich möchte im folgenden jedoch nicht weiter auf eine Diskussion der ethischen Grundlagen der Wissenschaft eingehen, da dies den Rahmen meiner Arbeit sprengen würde. Stattdessen möchte ich, trotz des Zweifels an ihrer Grundlage, die Argumente darstellen, die „radikale" angewandte Mathematiker wie Volk gegen den Standpunkt der „reinen" Mathematiker vorbringen.

Was Volk den „reinen" Mathematikern ankreidet, ist vor allem, daß sie sich weigern, ihr Handeln zu begründen, oder zumindest es so zu begründen, wie er sich das vorstellt. Zu seinen Kritikpunkten gehört deswegen, daß die formalen Theorien der „reinen" Mathematiker keine Bestandteile enthalten, mit denen man moralisch bzw. politisch hochwertige von minderwertigen Strukturen unterscheiden kann.[347] „Die metatheoretisch proklamierte Isolierung mathematischer Verfahren aus ihren Zweckzusammenhängen und Funktionalisierungen wird in das Ideologem „reiner" Mathematik überhöht, um sich in diesem Nebel der Argumentations- und Reflexionspflicht für solches Tun zu entziehen. [...] Doch die Beantwortung der Zweck-Frage ist unverzichtbar für jeden. Niemand darf sie beiseite lassen."[348] An den oben angeführten Begründungen der „reinen" Mathematiker für ihr Handeln läßt Volk kein gutes Haar.

Der Argumentation der „reinen" Mathematiker mit der Schönheit der Mathematik hält Volk entgegen, ästhetische Argumente blieben subjektiv, solange es eine begründete Ästhetik nicht gebe.[349] Außerdem sei Schönheit eine Sekundärqualität: „Erst wenn ein Mittel für einen schon als sinnvoll anerkannten Zweck als angemessen begründet ist, erst dann ist die Frage nach der Schönheit dieses Mittels sinnvoll."[350] - In welch trister Welt würden wir leben, wenn sich mehr Menschen eine solche Auffassung zu eigen machen würden!

Auch die, aus dem Mathematiktreiben erwachsende Freude läßt Volk als Begründung nicht gelten. Er fragt in Anlehnung an Lorenzen, ob es bei einer solchen Einstellung nicht eher im öffentlichen Interesse läge, anstelle der „reinen" Mathematik die Parfümindustrie zu fördern, weil diese mehr Menschen Freude mache.[351] Volk sieht in der

[347] vgl. Volk 1984: S. 86f
[348] Volk 1984: S. 96f
[349] vgl. Volk 1984: S. 103f
[350] Volk 1984: S. 104
[351] vgl. Volk 1984: S. 104

formalistischen „reinen“ Mathematik auch kein Mittel zur Vermeidung von Widersprüchen in der Mathematik, sondern lediglich eine weitere „Entfremdung des theoretischen Denkens von seinem praktischen Ausgang und Ziel [...].“[352] In der Möglichkeit der „reinen“ Mathematik, unbegrenzt neue Forschungsbereiche zu erschließen, sieht er ein bloßes Arbeitsbeschaffungsprogramm.

Nicht einmal das Argument der „potentiellen Werkzeuge“, läßt Volk gelten, obwohl es ja eine Annäherung an seine, die gesellschaftliche Relevanz des mathematischen Handelns einfordernde Position darstellt. „Die These der ‘potentiellen Werkzeuge’ ist fadenscheinig und landläufig. Der akademische Klimmzug entlarvt sich schnell vor dem Hintergrund, der ihn erzwingt und vor dem er vorgetragen wird. Die formalistische Metatheorie stellt keine Regeln bereit, die die Praxisrelevanz ihrer ‘Ergebnisse’ verbürgen. Diese vorgängige (weil metatheoretische) Leugnung der Verpflichtung wissenschaftlicher Arbeit zur Praxisrelevanz entzieht die Möglichkeit, mathematisches Denken begründet zu orientieren.“[353] Zusätzlich bemängelt Volk, das Werkzeugargument eigne sich auch dazu, „faktische Zweckbezüge und faktische Funktionalisierung zu verschleiern. Statt daß man offenlegt, für welchen konkreten Zweck man tatsächlich Werkzeuge bereitstellt, lenkt man ab und veröffentlicht nur, daß man an Gegenständen arbeitet, die ‘vielleicht’ als Werkzeuge gebraucht werden ‘könnten’ [...].“[354]

1.4.2.3 Der ideologische Kern der Auseinandersetzung

Es läßt sich deutlich erkennen, daß die meisten Argumente, die von beiden Seiten für die Begründung ihres Standpunktes angeführt werden, nicht mathematischer, sondern ideologischer Natur sind. Auf die Spitze getrieben könnte man sagen, die „reinen“ Mathematiker betrachten die Mathematik vielfach als eine Spielwiese, auf der sie sich verlustieren wollen, ohne irgendjemand dafür Rechenschaft geben zu müssen. Dabei berufen sie sich auf ihr Recht zur Selbstverwirklichung und lehnen gesellschaftliche Verantwortung weitgehend ab. Zu allem Überfluß betrachten sie ihr Tun auch noch als besonders herausragende, geistige Leistung. Die angewandten Mathematiker hingegen interessieren sich entweder genausowenig für die Mathematik wie jemand, der einen Nagel in die Wand schlägt, für die Hammerindustrie; oder sie fordern für jedes Handeln, auch für das mathematische, Zwecksetzung, rationale Begründung und gesellschaftliche Relevanz ein, so wie ich es im Fall von Volk gezeigt habe.

Beide Positionen sind in dieser Form nicht haltbar. Sichert ein Mathematiker seinen Lebensunterhalt anderweitig, kann er im Bereich der Mathematik selbstverständlich tun und lassen, was er will. Sobald er aber zur Ausübung seiner mathematischen Tätigkeit auf Förderung, sei sie gesellschaftlicher oder privater Natur, angewiesen ist, begibt er sich in ein Abhängigkeitsverhältnis. Er ist nun gezwungen, seine Tätigkeit dem jeweiligen Förderer gegenüber zu rechtfertigen, da er sonst damit rechnen muß, daß dieser die Förderung einstellt. Er befindet sich in einer ganz ähnlichen Situation wie ein Künstler, der zwar grundsätzlich malen kann, was er will, aber um von dieser

[352] Volk 1984: S. 98
[353] Volk 1984: S. 102
[354] Volk 1984: S. 102

Tätigkeit leben zu können, Bilder malen muß, die sich auch verkaufen. In so fern ist zumindest der Teil der Mathematiker, der seiner Tätigkeit auf Grund öffentlicher Förderung nachgeht, verpflichtet, sein Tun öffentlich zu rechtfertigen. Ein Blick in die Geschichte könnte die „reinen" Mathematiker außerdem daran erinnern, daß an ihrer Tätigkeit nur unter ganz bestimmten gesellschaftlichen Bedingungen Bedarf besteht, die bisher nur in - in geschichtlichen Dimensionen gedacht - relativ kurzen Zeitabschnitten gegeben waren.

„Radikale" angewandte Mathematiker wie Volk hingegen müssen sich sagen lassen, daß weder Wissenschaft im ,llgemeinen, noch Mathematik im besonderen so betrieben wird, wie sie sich das vorstellen, und daß das auch gut so ist, weil es nicht funktionieren würde.

Im folgenden möchte ich deswegen zeigen, wie „reine" und angewandte Mathematik sich zum beiderseitigen Nutzen ergänzen können, wenn man den sinnlosen ideologischen Sprengstoff aus der Diskussion nimmt.

1.4.3 Symbiose

Blickt man in der Geschichte zurück, so wird deutlich, daß sich ohne ihr jeweiliges Gegenstück, weder die „reine" noch die anwendungsorientierte Mathematik, zu dem hätte entwickeln können, was sie heute ist. Damit möchte ich nicht behaupten, daß die Trennung in angewandte und „reine" Mathematik sinnlos ist. Es läßt sich nicht abstreiten, daß diese Trennung existiert und die Arbeit zahlreicher Mathematiker geprägt hat. Vielmehr möchte ich damit sagen, daß die „reine" Mathematik der angewandten ebensoviel zu verdanken hat wie umgekehrt und daß beide sich bisher stets zum gegenseitigen Nutzen beeinflußt haben, zwei Tierarten gleich, die in einer symbiotischen Beziehung leben, von der beide profitieren.[355]

Die „reine" Mathematik, hat im Laufe der Geschichte tatsächlich eine Vielzahl von Modellen und mathematischen Methoden für die Anwendung bereitgestellt. Auf diese Weise wurden viele wissenschaftliche Entdeckungen und technische Entwicklungen möglich, die sonst vermutlich noch lange auf sich hätten warten lassen oder gar nie gemacht worden wären.[356] Ein Ende dieses nützlichen Einflusses der „reinen" Mathematik auf die Anwendung ist nicht abzusehen; so nennt Barrow „als neueste Entwicklung die Anwendung esoterischer Aspekte der Struktur komplexer Mannigfaltigkeiten bei der Untersuchung von 'Superstrings' in der Teilchenphysik."[357] Zu Volks obengenannten Einwänden gegen diesen Standpunkt kann man in diesem Zusammenhang nur sagen, daß sie den geschichtlichen Tatsachen schlicht und einfach nicht gerecht werden.

Aber auch die „reine" Mathematik hat stets von der Anwendung profitiert. Immer wie-

[355] vgl. Beck: S. 88ff
[356] vgl. Beck: S. 99ff
[357] Barrow 1993: S. 17

der waren es reale Problemstellungen, die innermathematische Entwicklungen angestoßen haben.[358] Man kann hier zurückgehen bis zur Bedeutung des Nilhochwassers für die Entwicklung der Geometrie, die in der griechischen Antike als Inbegriff „reiner“ Mathematik galt. In späteren Zeiten wurde beispielsweise die Entwicklung der Analysis wie ich gezeigt habe, stark von dem Wunsch beeinflußt, Bewegungen beschreibbar zu machen. Der Mathematiker John von Neumann vertritt die Ansicht, daß nicht nur viele Entwicklungen der Mathematik durch Anwendungen angestoßen wurden, sondern auch immer wieder eine Auffrischung durch die empirische Forschung erfuhren. Seiner Ansicht nach entstehen mathematische Ideen aus empirischen Wurzeln heraus. „Wenn sie sich jedoch erst einmal von dort her herausgebildet haben, beginnen sie ein eigenartiges, selbständiges Leben, und man könnte den mathematischen Gegenstand am ehesten mit einem schöpferischen Gegenstand vergleichen, der fast ausschließlich ästhetischen Motivationen unterliegt, auf keinen Fall aber mit einer empirischen Wissenschaft. [...] Es besteht jedoch die ernste Gefahr, daß der Gegenstand im Zuge seiner Entwicklung den Weg des geringsten Widerstands einschlägt, daß der Strom, so weit von seiner Quelle entfernt, sich in eine Vielzahl von unbedeutenden Wasserläufen aufspaltet und daß die Disziplin zu einer ungeordneten Menge von Einzelheiten und Verflechtungen wird. Mit anderen Worten, wenn sich ein mathematischer Gegenstand sehr weit von seiner empirischen Quelle entfernt hat oder wenn mit ihm viel abstrakte Inzucht getrieben worden ist, besteht die Gefahr der Degeneration. [...] Jedenfalls scheint mir, wenn einmal diese Stufe erreicht worden ist, die verjüngende Rückkehr zur Quelle das einzige Heilmittel zu sein: das Neueinführen mehr oder weniger explizit empirischer Ideen. Ich bin davon überzeugt, daß dies in der Vergangenheit eine notwendige Voraussetzung dafür war, die Frische und Lebenskraft der Mathematik zu erhalten und daß dies auch in Zukunft so sein wird.“[359]

Michael Otte versucht diese beiden Sichtweisen zusammenzufassen: „Die Anwendung bildet nicht ein nur äußerliches Stimulans, und meine Motivation, mich mit Mathematik zu beschäftigen, rührt nicht aus dem Bezug zu diesem oder jenem willkürlich herausgegriffenen außermathematischen Problem her, sondern sie ruht auf der Tatsache, daß die Mathematik zu meiner Fähigkeit, mir Wirklichkeit theoretisch anzueignen, insgesamt beiträgt, einer Fähigkeit, die durch die Arbeitsteilung und Kooperation innerhalb der Wissenschaften und zwischen verschiedenen Bereichen gesellschaftlicher Aktivität systematisch entwickelt wird.“[360]

---

[358] vgl. Beck: S. 92ff
[359] Neumann 1974: S. 45f
[360] Otte 1974: S. 13

Aber man kann noch einen Schritt weitergehen - reduziert man Wirklichkeit nicht unbegründeter Weise allein auf *materielle* Wirklichkeit, sondern versteht darunter all das, was der Mensch wahrnehmen und worin er wirken kann, dann löst sich der Knoten auf.[361] Mathematische Abstraktionen gehören dann genauso zur Wirklichkeit des Menschen wie Bäume oder Autos. Ganz selbstverständlich betreibt man dann „Mathematik sozusagen als einen wesentlichen Teil des 'Gesamtunternehmens Wissenschaft' in allen seinen Aspekten."[362]

1.4.4 Was für eine Wissenschaft ist die Mathematik?

Als ich das Thema dieser Arbeit mit verschiedenen Leuten diskutierte, wurde ich immer wieder mit der Frage konfrontiert, was für eine Wissenschaft die Mathematik den eigentlich sei. Ob es eine Naturwissenschaft wäre, eine Geisteswissenschaft oder vielleicht gar keine Wissenschaft, sondern eine freie Kunst. Nach den obigen Erörterungen sollte klar sein, daß all diese Versuche, die Mathematik zu fassen, zu kurz greifen. Die Vorstellung von Wissenschaft bildete sich erstmals im antiken Griechenland heraus, die Einteilung in Natur- und Geisteswissenschaften fand sogar erst in der Neuzeit statt, aber schon lange zuvor war die Mathematik über alle hier gesetzten Grenzen hinausgewachsen. Die Frage, ob die Mathematik Natur- oder Geisteswissenschaft sei, ist so sinnlos wie die Frage, ob Säugetiere Land- oder Meerestiere seien.[363]

Das Verhältnis von angewandter und „reiner" Mathematik ist nun weitgehend aufgeklärt. Die Frage, was Mathematik eigentlich ist, mußte ich bislang schuldig bleiben. Deswegen möchte ich im folgenden Abschnitt die Antworten, die im Laufe der Zeit auf diese Frage gegeben wurden, zusammentragen und versuchen, sie systematisch zu ordnen.

[361] Ich werde diesen Gedankengang im Abschnitt „2.1.5 Konstruktivismus und Mathematik" noch näher erläutern.
[362] Otte 1974: S. 13f
[363] vgl. Schischkoff 1961: S. 185, S. 399 und S. 630

1.5 Was ist Mathematik - Ansichten im Überblick

1.5.1 Im Dschungel philosophischer Sichtweisen

Ordnung in den Dschungel von Sichtweisen über das Wesen der Mathematik und der daraus entstandenen philosophischen Schulen zu bringen, ist nicht einfach. In der Literatur finden sich die unterschiedlichsten Zusammenstellungen und was dem einen Autor ein übergeordnetes Unterscheidungsmerkmal ist, stellt der nächste als zusätzliche Schule neben andere. Ich habe deswegen den Versuch unternommen, Schneisen in diesen Dschungel zu schlagen und zunächst einmal verschiedene Sichtweisen in Gruppen zu bündeln.

1.5.2 Schneisen im Dschungel

1.5.2.1 Logizismus, Formalismus, Bourbakismus und Intuitionismus

Logizismus, Formalismus, bourbakische Strukturmathematik und Intuitionismus sind verschiedene Versuche, den Bestand der Mathematik, angesichts der Antinomien der Mengenlehre, zu sichern. Sie entwickelten sich alle innerhalb eines relativ kurzen Zeitraumes, hauptsächlich in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, spiegeln aber Aspekte der Mathematik wieder, die sich schon lange vorher zeigten. Für den *Logizismus* läßt sich die gesamte Mathematik auf die Logik zurückführen, außerdem wird angenommen, daß die Mathematik in einer objektiven und vom menschlichen Bewußtsein unabhängigen Weise bereits existiert. Diese zweite Annahme entspricht dem platonischen Standpunkt, auf den ich gleich noch eingehen werde. Der *Formalismus* sieht in der Mathematik hauptsächlich die Manipulation an sich inhaltsleerer Zeichenketten nach vorgegebenen Regeln. Der Bestand der Mathematik soll gesichert werden, indem die Widerspruchsfreiheit der ihr entsprechenden formal-logischen Systeme bewiesen wird. Die *bourbakische Strukturmathematik* behält die formal-logische Darstellungsweise des Formalismus bei. Während der Formalismus die Mathematik jedoch als etwas *statisches* ansieht, dessen Bestand gesichert werden muß, wählt die Bourbaki Gruppe einen *dynamischen* Zugang. Die Mathematik wird als lebendiges Ganzes gesehen, das wächst, sich verändert und immer wieder neu organisiert werden muß. Das ist sicherlich auch ein Grund dafür, daß die, für den Formalismus verheerenden, gödelschen Sätze von den Bourbakianern nicht sonderlich ernst genommen werden. Der *Intuitionismus* schließlich versucht die Mathematik auf einer Urintuition des Zählens aufzubauen und rückt dabei den Verfahrensaspekt der Mathematik in den Mittelpunkt.[364]

[364] vgl. den Abschnitt „Mathematik in der Krise“ dieser Arbeit.

1.5.2.2 Platonismus, Empirismus, Konventionalismus und Konstruktivismus

Fragt man nach dem Wesen und dem Ursprung der Mathematik, so bieten Platonismus, Empirismus, Konventionalismus und Konstruktivismus grundlegendere Antworten an als die mathematischen Schulen, die sich als Reaktion auf die Antinomien der Mengenlehre herausbildeten.

Die Kernaussage des *Platonismus* ist, daß mathematische Ideen in einer objektiven und vom menschlichen Bewußtsein unabhängigen Art und Weise in einer Ideenwelt existieren. Mathematiker tun nichts anderes, als diese schon existierenden mathematischen Objekte und ihre Beziehungen untereinander zu entdecken und Beschreibungen davon anzufertigen. Diese Beschreibungen stellen aber nicht die Mathematik selbst dar, sondern nur ein mehr oder weniger unvollkommenes Abbild davon. Die Mathematik selbst würde auch existieren, wenn es keine Mathematiker gebe.[365] „Die Mathematik der Platonisten transzendiert die Welt, sie hat vor der Schöpfung existiert und sie wird ihren Untergang überdauern."[366] Neuzeitliche Anhänger des Platonismus waren unter anderen Frege, Russell, Cantor, Bernays, Hardy und Gödel. Der Platonismus bietet ein Kriterium an, mit dessen Hilfe über die Existenz mathematischer Objekte und die Wahrheit mathematischer Aussagen entschieden werden kann - die Übereinstimmung mit der Welt mathematischer Ideen. Die entscheidende Frage: wie sich diese Übereinstimmung mit der Welt mathematische Ideen feststellen läßt, kann der Platonismus jedoch nicht beantworten. Er gibt weder Auskunft darüber, wo sich die Welt mathematischer Ideen befindet, noch wie man in Kontakt mit ihr treten kann.[367] „Wenn die mathematischen Entitäten tatsächlich außerhalb unserer physischen Welt der erfahrbaren einzelnen Dinge existieren, dann kann man wohl nur in einer Art mystischer Erfahrung mit jener Welt in Kontakt treten, mehr in der Art einer Séance als durch wissenschaftliche Arbeit."[368]

Die Grundthese des *Empirismus* ist, daß alle menschliche Erkenntnis, auch die mathematische, ihren Ursprung in der Erfahrung der Wirklichkeit hat. In Bezug auf die Mathematik kann man diese Grundthese nun verschieden scharf interpretieren. Man kann zum einen argumentieren, daß mathematische Ideen zwar (mitunter über Umwege) aus der Erfahrung entstehen, aber, wenn sie einmal entstanden sind, eine von der empirischen Welt unabhängige Eigendynamik erlangen. Ich habe im Abschnitt „1.2.2 Zahlgefühl - Zählen - Zahl" dargestellt, wie ein solcher Prozeß, bei dem sich aus empirischen Erfahrungen nach und nach abstrakte Ideen entwickeln, aussehen kann. Diese Spielart des Empirismus wird wohl von den meisten Mathematikern, abgesehen von einigen platonischen Esoterikern, akzeptiert. Einige Vertreter des empiristischen Standpunktes, wie zum Beispiel John Stuart Mill, gehen jedoch noch weiter. Wegen der Unzuverlässigkeit unserer Erfahrung, auf die mathematisches Wissen letztendlich zurückzuführen ist, hat es dieser Sichtweise nach nur hypothetischen Status und muß immer wieder durch die Erfahrung bestätigt werden, wodurch es zwar sicherer aber niemals zur wirk-

[365] vgl. Ernest 1993: S. 29
[366] Barrow 1993: S. 64
[367] vgl. Barrow 1993: S. 63ff und Ernest 1993: S. 29f
[368] Barrow 1993: S. 65

licher Gewißheit wird. Dieser Standpunkt zog beträchtliche Kritik auf sich. Zum einen, weil sich der empirische Kern zahlreicher mathematischer Aussagen und Gegenstände nur sehr mühsam beobachten läßt - man denke hierbei nur an sehr große Zahlen. Zum anderen, weil mathematische Theorien aufgegeben werden müßten, wenn sie unserer Wahrnehmung der Wirklichkeit widersprächen. Der Intuitionismus mit seinem Zurückgehen auf die Urintuition des Zählens und seiner Ablehnung des Aktual-Unendlich steht dem Empirismus sehr nahe.[369]

Für den *Konventionalismus* beruht mathematisches Wissen auf sprachlichen Konventionen. Auch diese Sichtweise besitzt verschiedene Ausprägungen. Wenn man davon ausgeht, daß sprachliche Konventionen eine sichere Grundlage für Mathematik und Logik bilden und daß das gesamte mathematische Wissen auf dieser Grundlage mit Hilfe logischer Schlüsse aufgebaut werden kann, so gelangt man zu einem Standpunkt, der Logizismus und Formalismus sehr nahe steht. Versteht man den Konventionalismus aber im Sinne von Wittgensteins Spätphilosophie, so ergibt sich ein ganz anderes Bild. Für Wittgenstein ist die Mathematik eine Sammlung von Sprachspielen und die Bedeutung von Begriffen wie „wahr“, „falsch“ oder „Beweis“ hängt davon ab, in wie weit man die Regeln dieser Sprachspiele akzeptiert. Dadurch werden mathematische Aussagen auf implizite Vereinbarungen innerhalb von Sprachgemeinschaften zurückgeführt und verlieren dadurch viel von der Sicherheit, die man ihnen gerne zuschreibt.[370]

Auch was den *Konstruktivismus* betrifft, müssen zwei Sichtweisen unterschieden werden, die ich beide im folgenden Kapitel noch ausführlich erläutern werde. Für den *radikalen* Konstruktivismus stellt mathematisches Wissen wie menschliches Wissen überhaupt eine funktionale Anpassung an die Wirklichkeit dar. Mathematische Aussagen sind dieser Auffassung nach nicht *wahr* in dem Sinne, daß sie mit einer objektiven materiellen oder geistigen Wirklichkeit übereinstimmen, sondern allenfalls passend, wenn sie das leisten, was von ihnen erwartet wird. Der *soziale* Konstruktivismus sieht die Mathematik als eine Konstruktion an, die in einem ständigem Abgleich von subjektivem und intersubjektivem Wissen mittels sprachlicher Interaktion zustande kommt. Nach Auffassung beider konstruktivistischer Spielarten ist die Mathematik ständiger Veränderung unterworfen.[371]

1.5.2.3 Der Stellenwert mathematischer Wahrheit

Will man den Stellenwert mathematischer Aussagen zum Unterscheidungsmerkmal machen, so findet man Schulen, für die mathematische Aussagen *letztendliche Wahr*

[369] vgl. Ernest 1993: S. 34, Neumann 1974: S. 45 und Thiel 1995: S. 14f
[370] vgl. Ernest 1993: S. 30ff
[371] vgl. Ernest 1993: S. 42ff, Glasersfeld 1985: S. 18f und den Abschnitt „2.1.4 Die konstruktivistische Altern a-tive“ meiner Arbeit.

heiten, *zunehmend bessere Annäherungen an letztendliche Wahrheiten* oder nur *vorläufige Wahrheiten* darstellen.[372]

Schulen, für die mathematische Aussagen *letztendliche Wahrheiten* darstellen, gehen davon aus, daß es einen festen, unveränderlichen Bestand an mathematischen Wahrheiten gibt, der von den Mathematikern nach und nach entdeckt wird und der durch die deduktive Beweismethode abgesichert ist. Neuentdeckte mathematische Wahrheiten werden dabei dem Bestand der Mathematik hinzugefügt, ohne daß am bisherigen Bestand irgendwelche Änderungen vorgenommen werden. Logizismus und Formalismus versuchen unter verschiedenen Vorzeichen einen solchen absoluten Bestand mathematischer Wahrheiten abzusichern, es scheint aber, daß jedes derartige Unterfangen aus prinzipiellen Gründen zum Scheitern verurteilt ist.[373]

Auch die Schulen, die die Mathematik als eine *zunehmend bessere Annäherung an letztendliche Wahrheiten* ansehen, gehen davon aus, daß es letztendliche mathematische Wahrheiten gibt. Mathematik ist für sie das Ergebnis der menschlichen Bemühungen, diese Wahrheiten zu erkennen. Dabei werden alte mathematische Theorien nach und nach durch neue, überlegene Theorien ersetzt. Die neuen Theorien berücksichtigen alle Erkenntnisse, auf denen die alten Theorien basierten und neue Erkenntnisse dazu, so daß eine ständige Annäherung an die letztendlichen mathematischen Wahrheiten stattfindet. Diese Sichtweise läßt sich im Intuitionismus und in der Strukturmathematik des Bourbakikreises wiederfinden.[374]

Schließlich gibt es noch Schulen, für die die mathematischen Wahrheiten genauso *vorläufig* und *veränderlich* sind wie alle anderen Wahrheiten, die der menschlichen Erkenntnis zugänglich sind auch. Die auf Wittgenstein zurückgehende Spielart des Konventionalismus und die verschiedenen konstruktivistischen Sichtweisen der Mathematik sind hier einzuordnen.[375]

1.5.2.4 Entdecker und Erschaffer

Schließlich kann man ganz grundlegend unterscheiden zwischen denjenigen, die glauben, daß die Mathematik schon da ist und vom Menschen nur *entdeckt* wird und denjenigen, die glauben, daß die Mathematik vom Menschen *gemacht* wird, um eine an sich ungeordnete Welt zu strukturieren. Ich habe bereits darauf hingewiesen, daß diese beiden Sichtweisen wahrscheinlich schon in vorgeschichtlicher Zeit existierten. Manche Standpunkte, wie der platonische und der empirisch lassen sich ihnen sehr gut unterordnen, andere widersetzen sich einer solchen Zuordnung.

[372] vgl. Ernest 1993: S. 27f
[373] vgl. Ernest 1993: S. 13ff und S. 27f, außerdem den Abschnitt „1.3.7 Mathematik in der Krise“ dieser Arbeit.
[374] vgl. Ernest 1993: S. 27ff und den Abschnitt „1.3.7 Mathematik in der Krise“ dieser Arbeit.
[375] vgl. Ernest 1993: S. 18, S. 30ff und S. 42ff und den Abschnitt „2.1.4 Die konstruktivistische Alternative“ dieser Arbeit.

1.5.3 Schlingpflanzen

Sicherlich gibt es noch mehr Möglichkeiten, Schneisen in den Dschungel der mathematischen Philosophien zu schlagen, als die, die ich hier angeführt habe. Auch finden sich in der Literatur noch zusätzliche mathematisch-philosophische Schulen, die ich hier nicht erwähnt habe.[376] Aber schon die von mir angeführten sind kaum unter einen Hut zu bringen. Auf den ersten Blick scheint es verlockend, die verschiedenen Unterscheidungsmerkmale in einer Hierarchie anzuordnen und zu sagen: „ich unterscheide in die Schulen, die dieses oder jenes Merkmal gemein haben - in den einzelnen Gruppen kann ich dann nach einem weiteren Merkmal unterscheiden usw...“ - Doch egal welches Unterscheidungsmerkmal man als das Grundlegendste wählt, es funktioniert nicht. Die Unterscheidungen nach einem Merkmal verlaufen oft kreuz und quer durch die Schulen, die durch ein anderes Unterscheidungsmerkmal gebildet wurden. Eine weitere Schwierigkeit, der ich bei dem Versuch die verschiedenen Schulen in Beziehung zueinander zu setzen begegnete, war die, daß sie teilweise von völlig verschiedenen Wirklichkeitskonzeption ausgehen. Welchen Einfluß verschiedenen Sichtweisen der Wirklichkeit auf die Frage nach dem Wesen der Mathematik haben, werde ich im folgenden Kapitel noch näher erläutern. An dieser Stelle habe mich aus den genannten Gründen darauf beschränkt, die einzelnen Sichtweisen kurz darzustellen, sie in verschiedenen Gruppen zu ordnen und die Querverbindungen so weit als möglich aufzuzeigen. Aber nach wie vor überwuchern Schlingpflanzen die Schneisen, die ich versucht habe, in den Dschungel mathematisch-philosophischer Schulen zu schlagen und es bleibt ein lohnendes Abenteuer, darin nach eigenen Wegen zu suchen.

[376] Bei Ernest (1993: S. 34) wird noch eine auf Imre Lakatos zurückgehende quasi-empirizistische Schule angeführt und Thiel (1995: S. 17) führt die Auffassung von Nicolai Hartmann und Günter Jacobi an, nach der mathematische Gegenstände einen „fiktiven An-sich-Bestand“ besitzen.

*„**Wirklichkeit**, die -*
Der Traum eines irren Philosophen.
Was im Tiegel bliebe, wenn man ein Gespenst schmölze.
Kern eines Vakuums.“[377]

Ambrose Bierce

Kapitel 2: Wirklichkeit

2.1 Wirklichkeit in der Philosophie

2.1.1 Der Wirklichkeitsbegriff

Im ersten Kapitel dieser Arbeit war schon ziemlich viel von Wirklichkeit die Rede, aber das Wort wurde in einer undifferenzierten und unreflektierten Art und Weise, am ehesten im Sinne einer allgemeinen Lebenswirklichkeit des Menschen verwendet. Erklärungen dafür, was Wirklichkeit ist, scheinen zunächst auch gar nicht nötig zu sein - ist Wirklichkeit nicht das, was wir jeden Tag erleben? Wirft man jedoch einen Blick auf die Geschichte der abendländischen Philosophie, so zeigt sich, daß sich mit diesem Begriff ganz unterschiedliche Konzeptionen verbinden. Zwar stehen all diese Vorstellungen in irgendeinem Zusammenhang mit dem, was wir tagtäglich erleben, aber sie weisen diesem Erleben einen unterschiedlichen Stellenwert zu und erklären es auf verschiedene Weisen.

Da sich das Sachrechnen, um das es im folgenden noch gehen soll, in einem ständigen Spannungsfeld zwischen Mathematik und Wirklichkeit bewegt, möchte ich hier ein wenig genauer untersuchen, was man eigentlich unter diesem Begriff versteht und ob es angemessen ist, ihn so sorglos zu gebrauchen, wie ich das bisher in dieser Arbeit getan habe. Dabei werde ich die Sichtweise in den Vordergrund rücken, die mir die adequateste zu sein scheint und die anderen nur kurz streifen.

[377] Bierce 1996: S. 124

2.1.2 Ontologische Wirklichkeitskonzeptionen

Lange Zeit waren in der Philosophiegeschichte ontologische[378] Wirklichkeitsvorstellungen vorherrschend. Das bedeutet Wirklichkeitsvorstellungen, die etwas über das „Sein“, das Wesen der Wirklichkeit selbst aussagen. Den Rand des Spektrums dieser Vorstellungen begrenzen *Materialismus* und *Idealismus* in ihren extremen Formen.

2.1.2.1 Materialismus

Der extreme Materialismus geht davon aus, daß Materie den Grund aller Wirklichkeit bildet. Sämtliche Phänomene, physikalische, biologische und selbst geistige, lassen sich deswegen auf rein materielle Vorgänge reduzieren. Dem Geist wird keine Wirklichkeit zugebilligt, er ist lediglich ein Scheinphänomen, das im Zusammenhang mit bestimmten Materiestrukturen auftritt. Der Materialismus trat im Laufe der Zeit in unzähligen, teilweise auch gemäßigteren Formen auf. Eine der einflußreichsten Formen war dabei der dialektische Materialismus, der zur sowjetischen Staatsphilosophie wurde und auf diese Weise auch die Wissenschaft in den kommunistischen Ländern stark prägte. Von einem extremen materialistischen Standpunkt aus gesehen stellt sich die Frage nach dem Verhältnis von Mathematik und Wirklichkeit nicht. Das materielle Universum entwickelt sich nach vorgegebenen Gesetzen streng deterministisch. Leben, Bewußtsein und Vorstellungen, einschließlich mathematischer Vorstellungen, sind nur Scheinphänomene, die bei diesem Vorgang auftreten, aber keinen Einfluß auf seinen Ablauf nehmen.[379]

2.1.2.2 Idealismus

Der Idealismus bildet das Gegenstück zum Materialismus. Nach idealistischer Auffassung ist das Wesen der Wirklichkeit Geist. Alles, auch das, was als Materie erscheint, kann als eine Erscheinungsform des Geistes betrachtet werden.[380] Die extremste Form des Idealismus ist wohl der Solipsismus, der „das subjektive Ich mit seinem Bewußtseinsinhalt für das einzig Seiende hält.“[381] Aus einer extremen idealistischen Sicht heraus würde sich das Verhältnis Mathematik - Wirklichkeit ungefähr so darstellen: Sowohl Abstraktionen als auch die sogenannte materielle Welt sind nur Formen des Geistes, sich selbst auszudrücken. Da die Mathematik dem Geist dazu dient, sowohl in Abstraktionen als auch in der „materiellen“ Welt Strukturen zu schaffen, ist Mathematik eine Möglichkeit des Geistes, die Art und Weise, in der er sich ausdrückt, zu strukturieren.

2.1.2.3 Dualismus

Neben den extremen Positionen des Materialismus und des Idealismus gibt es eine Vielzahl dualistischer Standpunkte, die auf irgendeine Weise Geist *und* Materie als

[378] vgl. Schischkoff 1961: S. 419
[379] vgl. Schischkoff 1961: S. 365f, Hayward 1996: 28f und Schwegler 1995: S. 9
[380] vgl. Schischkoff 1961: S. 253
[381] Schischkoff 1961: S. 536

Grundlage der Wirklichkeit ansehen. Eine solche Sichtweise findet sich beispielsweise bei Descartes, der unser heutiges Wissenschaftsverständnis stark mitprägte. Er unterscheidet zwischen der *res cogitans*, der *denkenden Substanz*, die alles Geistige umfaßt und der *res extensa*, der *ausgedehnten Substanz*, die das Materielle umfaßt.[382] „Mit Descartes also beginnt die neuzeitliche Zerreißung der Wirklichkeit in weltlose Subjekte auf der einen und bloße Objekte auf der anderen Seite [...].“[383] Lange Zeit hielt die neuzeitliche Wissenschaft an der Vorstellung fest, es gäbe eine objektive, sowohl in ihrem Sein als auch in ihren Eigenschaften unabhängig vom erkennenden Subjekt existierende Welt, die aber dem Subjekt dennoch mit Hilfe der Wissenschaft zugänglich sei. Das konsequente Festhalten an diesem Standpunkt führte im Laufe der Zeit, besonders auf dem Gebiet der Quantenphysik, zu Entdeckungen, die ihn mehr und mehr fragwürdig erscheinen ließen. „Das Quantenpostulat bedeutet, daß jede Beobachtung atomarer Phänomene eine nicht zu vernachlässigende Wechselwirkung mit dem Messungsmittel fordert, und daß also weder Phänomenen noch dem Beobachtungsmittel eine selbständige physikalische Realität im gewöhnlichen Sinne zugeschrieben werden kann.“[384]

Das Hauptproblem aller dualistischen Sichtweisen besteht darin, plausibel zu erklären, wie ein Subjekt und eine objektive Welt, die in ihrem Sein verschieden und unabhängig voneinander sind, überhaupt in Beziehung zueinander treten sollen. Will man die Beziehung zwischen Mathematik und Wirklichkeit aus dualistischer Perspektive analysieren, so stellt sich vor allem die Frage, ob Mathematik Teil der objektiven Welt ist und vom Subjekt erkannt wird, oder ob sie Teil des Subjekts ist, und ihm hilft die objektive Welt zu erkennen.

2.1.3 Epistemologische Wirklichkeitskonzeptionen

Alle drei bisher genannten Standpunkte mit ihren unzähligen Variationen enthalten metaphysische Elemente, da es keine Möglichkeit gibt, empirische festzustellen, wie die Natur der Wirklichkeit tatsächlich beschaffen ist. Es sind deswegen ernste Zweifel angebracht, ob eine ontologische Fassung des Wirklichkeitsbegriffes sinnvoll ist. Spätesten seit der Veröffentlichung von Kants „Kritik der Reinen Vernunft“ im Jahre 1781 gibt es eine weiteren philosophischen Standpunkt, den man bei der Beschäftigung mit „Wirklichkeit“ einnehmen kann.[385] Bei diesem Standpunkt handelt es sich jedoch nicht um einen ontologischen, das bedeutet, daß nicht danach gefragt wird, wie die Wirklichkeit beschaffen ist, sondern danach wie wir die Wirklichkeit erkennen, wie verläßlich dieses Erkennen ist und wo seine Grenzen liegen. Es handelt sich um einen epistemologischen[386] Standpunkt.

[382] vgl. Schischkoff 1961: S. 96f und Schwegler 1995: S. 9
[383] Weischedel 1984: S. 122
[384] Fleck 1929: S. 428
[385] Bereits bei dem Vorsokratiker Xenophanes und bei Giambattista Vico, der ungefähr ein halbes Jahrhundert vor Kant lebte, finden sich in diese Richtung gehende Gedanken. (vgl. Glasersfeld 1985: S. 24ff)
[386] „Epistemologie (griech., ‘Wissenschaftslehre’), Erkenntnislehre [...]“. Schischkoff 1961: S. 134

Nach Kant entspringt alle Erkenntnis der Erfahrung, beruht also auf Sinneswahrnehmungen. Obwohl die Sinneswahrnehmungen auf diese Weise grundlegend für unsere Erkenntnis sind, wird die Erkenntnis mitgeformt durch Anschauungsformen, die schon vor aller Erkenntnis im Geist vorhanden sind, z. B. die Vorstellungen von Raum und Zeit. Kant nennt diese Anschauungsformen *apriorisch*.[387] In den letzten Jahrzehnten hat eine philosophische Schule zunehmend an Einfluß gewonnen, die selbst die Entstehung der von Kant als apriorisch vorausgesetzten Anschauungsformen noch auf Sinneswahrnehmungen zurückführen will: der *radikale Konstruktivismus*.[388]

2.1.4 Die konstruktivistische Alternative

Bei meiner Darstellung des radikalen Konstruktivismus werde ich mich vor allem auf die Arbeiten von Ernst von Glasersfeld, einem der prominentesten Vertreter der konstruktivistischen Denkweise beziehen.[389] Da mir im Rahmen dieser Arbeit nur eine sehr geraffte Darstellung der Glasersfeldschen Argumentation möglich ist, bitte ich, bei Bedarf bei ihm selbst nachzulesen. Zu diesem Zweck empfehle ich vor allem die in der Literaturliste aufgeführten Quellen.

2.1.4.1 Wissen und Wirklichkeit

Laut Glasersfeld soll der radikale Konstruktivismus „ein Modell des rationalen Wissens sein, nicht eine Metaphysik, die eine reale Welt zu beschreiben versucht."[390] Das macht es notwendig, sich mit der Bedeutung des Begriffes *Wissen* und seinem Verhältnis zum Begriff der *Wirklichkeit* zu beschäftigen. Was bedeutet es eigentlich zu sagen, daß man etwas über die Wirklichkeit weiß? Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Antworten auf diese Fragen.

2.1.4.2 Metaphysischer Realismus

Die erste besteht darin zu sagen, daß Wissen immer Wissen von einer objektiven, unabhängig vom Wissenden existierenden Wirklichkeit ist. Dieses Wissen ist dann *wahr*, wenn es die Wirklichkeit abbildet, in dem Sinne, daß es in bestimmten Eigenschaften

---

[387] Schischkoff 1961: S. 290ff
[388] vgl. Glasersfeld 1985: S. 16-37
[389] Seine Prominenz läßt sich unter anderem an der großen Zahl in den letzten Jahren erschienener Aufsätze zu konstruktivistischen Themen erkennen, die auf von Glasersfeld Bezug nehmen. Was die von Glasersfeld ausgearbeitete Form des Konstruktivismus auszeichnet, werde ich weiter unten noch erläutern.
[390] Glasersfeld 1997: S. 57

mit der Wirklichkeit übereinstimmt, bzw. in irgendeiner Weise gleichförmig mit ihr ist.[391]

Diese Sichtweise ist verführerisch einfach, und hat lange Zeit in der einen oder andern Form die Erkenntnisphilosophie beherrscht. Aber: „Dadurch, daß die Antwort auf die Frage, was Wissen ist, vorweggenommen wird, schafft die herkömmliche Erkenntnislehre ein ebenso unvermeidliches wie unlösbare Dilemma. Wenn Erkenntnis und Wissen eine Beschreibung oder Abbild der Welt *an sich* sein sollen, dann brauchen wir ein Kriterium, auf Grund dessen wir beurteilen könnten, wann unsere Beschreibungen oder Abbilder 'richtig' oder 'wahr' sind."[392] Um entscheiden zu können ob zwei Dinge in irgendwelchen Eigenschaften übereinstimmen, müssen wir sie vergleichen. Das ist aber in diesem Fall nicht möglich, da uns die Wirklichkeit selbst, mit der der Vergleich hier stattfinden müßte, nicht zugänglich ist. Zugänglich ist uns lediglich das, was wir von der Wirklichkeit wahrnehmen, bzw. unsere Erinnerung an das, was wir zuvor von der Wirklichkeit wahrgenommen haben. Die Wahrnehmung eines Apfels zum Beispiel, können wir „nur mit anderen Wahrnehmungen vergleichen, niemals aber mit dem Apfel selbst, so wie er wäre, bevor wir ihn wahrnehmen."[393]

Man kann in Anlehnung an Kant diese Kritik noch weiter treiben und fragen, ob die Wahrnehmungen, die wir machen, uns wirklich berechtigen, von einem *Ding* Apfel zu sprechen - also die Dinghaftigkeit des Apfels in Frage stellen.[394] Es ist dann „nicht mehr nur zweifelhaft, ob der wirkliche Apfel so glatt, duftend, süß und gelb ist, wie er erscheint, sondern auch ob da ein wirklicher Gegenstand existiert, der sich als zusammenhängendes Ganzes, so wie wir ihn als 'Ding' erleben, von der restlichen Welt absetzt."[395]

Der eben erläuterte und kritisierte Standpunkt zum Verhältnis von Wissen und Wirklichkeit wird als *metaphysischer Realismus* bezeichnet. „Ein metaphysischer Realist ist also jeder, der darauf besteht, daß wir etwas nur dann 'Wahrheit' nennen dürfen, wenn es mit einer als absolut unabhängig konzipierten, 'objektiven' Wirklichkeit übereinstimmt."[396] Dieses Sichtweise spiegelt sich in dem Bestreben der Wissenschaft wieder unveränderliche Naturgesetze zu entdecken und diese immer mehr abzusichern, damit sie dem Anspruch, „echte" Wahrheiten zu sein, gerecht werden.[397]

2.1.4.3 Radikaler Konstruktivismus

Die andere Antwort auf die Frage nach dem Verhältnis von Wissen und Wirklichkeit bietet der radikale Konstruktivismus an. Er sieht Wissen nicht als ein *Abbild* der Wirklichkeit in irgendeiner Form an, sondern als eine *Anpassung im funktionalen Sinn.* Um

[391] vgl. Glasersfeld 1985: S. 18f
[392] Glasersfeld 1985: S. 25. Hervorhebung dort.
[393] Glasersfeld 1985: S. 25
[394] vgl. Glasersfeld 1985: S. 25
[395] Glasersfeld 1985: S. 25
[396] Glasersfeld 1985: S. 18
[397] vgl. Glasersfeld 1985: S. 19

diesen Unterschied zu illustrieren, zieht von Glasersfeld die beiden Verben „stimmen“ und „passen“ heran. Sagt man von etwas, daß es *stimmt*, so impliziert dies eine Übereins*timmung*, eine Gleichartigkeit mit irgendetwas anderem in bestimmten Eigenschaften. Sagt man hingegen von etwas, daß es *paßt*, so bedeutet das, daß es in der Lage ist, eine bestimmte Funktion zu erfüllen.[398] „Ein Schlüssel ‘paßt’, wenn er das Schloß aufsperrt. Das Passen beschreibt die Fähigkeit des Schlüssels, nicht aber das Schloß. Von den Berufseinbrechern wissen wir nur zu gut, daß es eine Menge Schlüssel gibt, die anders geformt sind als unsere, aber unsere Türen nichtsdestoweniger aufsperren.“[399]

Die Verwendung des Wortes *passen* legt es nahe, die Evolutionstheorie als Vergleich heranzuziehen, in der der Begriff der An*passung* eine zentrale Rolle spielt. Allerdings sollte man Anpassung hierbei nicht als etwas verstehen, was verschiedene Abstufungen besitzt, in dem Sinne, daß es schlecht, besser und am besten Angepaßte gibt: „in einer Theorie, in der Überleben das einzige Kriterium der Auswahl der Arten ist, gibt es nur zwei Möglichkeiten: entweder paßt eine Art in ihre Umwelt, oder sie paßt nicht; d.h. sie überlebt, oder sie stirbt aus. Nur ein außenstehender Beobachter, der ausdrücklich andere, zusätzliche Kriterien einführt, als das bloße Überleben - etwa Ökonomie, Einfachheit oder Eleganz der Überlebensweise - könnte auf Grund dieser zusätzlichen Wertungsskala von ‘besserem’ oder ‘schlechterem’ Überleben sprechen; aber in dem theoretischen Modell, dessen Funktion ja ausdrücklich *nur* auf der Überlebensfähigkeit der Arten beruht, lassen zusätzliche Urteile sich grundsätzlich nicht begründen.“[400] Versteht man die Evolutionstheorie in diesem Sinne, so wird die Parallele zur radikalkonstruktivistischen Erkenntnistheorie deutlich: „Wie die Umwelt den Lebewesen (organischen Strukturen) Schranken setzt und Varianten vernichtet, die den so umgrenzten Raum der Lebensmöglichkeiten überschreiten, so bildet die Erlebenswelt, sei es im Alltag oder im Laboratorium, den Prüfstein für unsere Ideen (kognitive Strukturen). Das gilt für die ersten Regelmäßigkeiten, die der Säugling in seiner noch kaum differenzierten Erfahrung etabliert, es gilt für die Regeln, mit deren Hilfe Erwachsene das tägliche Leben zu meistern trachten, und es gilt für die Hypothesen, Theorien und die sogenannten ‘Naturgesetze’, die der Wissenschaftler formuliert in seinem Bemühen, der weitest möglichen Erfahrungswelt dauerhafte Stabilität und Ordnung abzugewinnen.“[401]

Dabei läßt sich weder zwischen der Umwelt und den Lebewesen, noch zwischen der Erlebniswelt und den kognitiven Strukturen, die darin entstehen, eine Kausalverbindung herstellen, in dem Sinne, daß man von der Wirkung: den Lebewesen bzw. kognitiven Strukturen direkte Rückschlüsse auf die Ursache: die Umwelt bzw. Erlebniswelt ziehen könnte. Die Umwelt und Erlebniswelt zeigen sich niemals positiv, sondern immer nur negativ, durch die Beschränkungen, die sie setzen.[402] „Ganz allgemein be-

[398] vgl. Glasersfeld 1985: S. 20
[399] Glasersfeld 1985: S. 20
[400] Glasersfeld 1985: S. 20. Hervorhebung dort. Zu diesem Verständnis der Evolutionstheorie vergleiche außerdem: Maturana / Varela 1987: S. 103ff
[401] Glasersfeld 1985: S. 21
[402] Vergleiche hierzu auch meine Erläuterungen zu den Problemen des logischen Empirismus im Abschnitt „1.3.8.3 Entwicklungen in der Wissenschaft“.

trachtet, ist unser Wissen brauchbar, relevant, lebensfähig (oder wie immer wir die positive Seite der Wertungsskala nennen wollen)[403], wenn es der Erfahrungswelt standhält und uns befähigt, Vorhersagen zu machen und gewisse Phänomene (d.h. Erscheinungen, Erlebnisse) zu bewerkstelligen oder zu verhindern. Wenn es diesen Dienst nicht erweist, wird es fragwürdig, unverläßlich, unbrauchbar und schließlich als Aberglaube entwertet. [...] Wenn nun so eine kognitive Struktur etwa bis heute standgehalten hat, so beweist das nicht mehr und nicht weniger, als eben, daß sie unter den Umständen, die wir erlebt und dadurch bestimmt haben, das geleistet hat, was wir von ihr erwarteten. Logisch betrachtet, heißt das aber keineswegs, daß wir nun wissen wie die objektive Welt beschaffen ist; es heißt lediglich, daß wir *einen* gangbaren Weg zu einem Ziel wissen, das wir unter von uns bestimmten Umständen in unserer Erlebniswelt gewählt haben. Es sagt uns nichts - und kann uns nichts darüber sagen - wieviele andere Wege es da geben mag und wie das Erlebnis, das wir als Ziel betrachten, mit einer Welt jenseits unserer Erfahrung zusammenhängt."[404]

2.1.4.4 Konstruierte Wirklichkeit

Da der Radikale Konstruktivismus sowohl eine *abbildhafte Beziehung* als auch eine *Ursache-Wirkung-Beziehung* zwischen Wirklichkeit und Wissen ablehnt, muß er sich die Frage stellen lassen, wie es dann kommt, „daß wir doch eine in vielen Beziehungen außerordentlich stabile und verläßliche Welt erleben, in der es dauerhafte Dinge gibt, ständige Verhältnisse und Regeln von Ursache und Wirkung, die uns gute Dienste erweisen?"[405]

Die Antwort des radikalen Konstruktivismus ist einfach: weil wir die Welt die wir erleben selbst in dieser Weise konstruiert haben. Worauf sich natürlich sofort die Frage ergibt, wie diese Konstruktion einer Welt vor sich gehen soll. „Die Erkenntnislehre wird so zu einer Untersuchung der Art und Weise, wie der Intellekt operiert, um aus dem Fluß des Erlebens eine einigermaßen dauerhafte, *regelmäßige* Welt zu konstruieren."[406] Bei dem Versuch ein Modell zu erstellen, das in der Lage ist, die Art und Weise, in der wir unsere Welt konstruieren, zu erklären, stützt sich Glasersfeld vor allem auf die Arbeit von Jean Piaget. Piaget war ursprünglich Biologe, sein Forschungen über die Entwicklung kognitiver Prozesse bei Kindern erlangten aber auch große Bedeutung für die Pädagogik und gründeten auf einer philosophischen Sichtweise, die der von Glasersfeld sehr nahestand.[407] So schrieb Piaget 1968: „Was bleibt ist Konstruktion als solche, und es gibt keinen Grund, warum es unvernünftig sein sollte zu denken, daß das eigentliche Wesen der Wirklichkeit darin besteht, ständig neu konstruiert zu werden und nicht in einer Ansammlung vorgefertigter Strukturen."[408] Glasersfeld charakterisiert die Arbeit von Piaget so: „Das zentrale Ziel seiner Arbeit war sein ganzes

[403] In der konstruktivistischen Literatur hat sich in diesem Zusammenhang inzwischen der Begriff „viabel" eingebürgert. Vgl. z.B. Glasersfeld 1997: S. 55
[404] Glasersfeld 1985: S. 22f
[405] Glasersfeld 1985: S. 26
[406] Glasersfeld 1985: S. 30. Hervorhebung dort.
[407] vgl. Glasersfeld 1997: S. 98ff
[408] Piaget, Jean: Le structuralisme (1. Auflage 1968) 4. Auflage. Paris 1970. S. 57f. Z.n. Glasersfeld 1997: S. 104

Leben lang der Aufbau eines viablen Modells, das zeigen könnte, wie wir ein relativ stabiles, geordnetes Bild unserer Welt aus dem Strom unserer Erfahrung gewinnen."[409] Ich möchte im folgenden nur einige herausgelöste Elemente eines solchen Modelles darstellen. Da diese aber sehr grundlegend sind, zeigen sie meiner Meinung nach deutlich, daß viele Dinge, die wir bisher für Eigenschaften einer objektiven, unabhängig von uns existierenden Welt hielten, durchaus unsere eigenen Konstruktionen sein können.

In seinem an Piaget orientierten Modell geht Glasersfeld davon aus, daß ein kognitiver Organismus seine Erlebnisse bewertet. Als angenehm bewertete Erlebnisse versucht er zu wiederholen und als unangenehm bewertete Zustände versucht er zu vermeiden. Dadurch wird das Handeln eines solchen Organismus *zielgerichtet*, es hat einen *Zweck*.[410] Glasersfeld meint hier jedoch etwas ganz anderes als Volk, wenn er von der Zweckgerichtetheit menschlichen Handelns spricht.[411] Volk versteht darunter rational begründbares Handeln, das auf die Erreichung eines Ziels in einer 'Außenwelt' ausgerichtet ist. Glasersfeld meint damit das bewußten oder unbewußten Bestreben eines wahrnehmenden Systems, angenehme Zustände zu stabilisieren. Die kognitiven Konstruktionen eines Organismus, die Vorstellungen, die er von der Welt hat, beurteilt er danach, wie gut sie diesem Zweck dienen.[412]

„Der Begriff der Zweckdienlichkeit [...] setzt seinerseits die Annahme voraus, daß es möglich ist, in der Erlebniswelt Regelmäßigkeiten festzulegen."[413] Wäre es nicht möglich, durch die Wiederholung bestimmter Verhaltensweisen im Anbetracht bestimmter Wahrnehmungen, wiederholt bestimmte weitere Wahrnehmungen zu provozieren, so wäre sowohl Wahrnehmung als auch jedes darauf beruhende Verhalten sinnlos.

Wie ist es dem Organismus nun möglich, Regelmäßigkeiten in seiner Erlebniswelt festzustellen? Damit zwei Erlebnisse in irgendeiner Form als gleichartig bewertet werden können, muß ein Vergleich gemacht werden. Die Fähigkeit einen Vergleich zu machen setzt schon einiges voraus, zum Beispiel die Fähigkeit, sich ein früheres Erlebnis zu vergegenwärtigen.[414] Das Ergebnis eines Vergleichs, die Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit kann auf verschiedene Weisen interpretiert werden. Einmal in Sinne von Äquivalenz, mit der Vorstellung, daß die Wahrnehmung zweier voneinander unabhängiger identischer Objekte, bzw. zweier verschiedener Objekte vorliegt. Und einmal im Sinne von individueller Identität, mit der Vorstellung, daß zwei Wahrnehmungen des selben Objektes zu unterschiedlichen Zeiten vorliegen, wobei das Objekt ent-

---

[409] Glasersfeld 1997: S. 104

[410] vgl. Glasersfeld 1985: S. 31. Maturana und Varela verzichten in ihrem Buch „Der Baum der Erkenntnis" auf diese Hypothese. Sie kommen aber zu ganz ähnlichen Ergebnissen wie Glasersfeld indem sie die Entwicklung kognitiver Strukturen allein auf den Evolutionsprozeß zurückführen. (vgl. Maturana und Varela 1987)

[411] Vergleiche den Abschnitt „1.4.2.2 Die Argumente der anwendungsorientierten Mathematiker" meiner Arbeit.

[412] Glasersfeld 1985: S. 31

[413] Glasersfeld 1985: S. 31

[414] Ich möchte hier nicht auf alle Einzelheiten eingehen, weil das den Rahmen meiner Arbeit sprengen würde. Vgl. hierzu den Abschnitt „Die Konstruktion der Erfahrungswirklichkeit" bei Glasersfeld 1997: S. 106ff, in dem er sich auf Piagets „La construction du réel chez l'enfant" (Neuchâtel 1937) bezieht.

weder gleich geblieben ist oder sich verändert hat. „Wie Piaget gezeigt hat, sind die Begriffe der Äquivalenz und der individuellen Identität keineswegs apriorisch angeboren, sondern werden von jedem ‘normalen’ Kind innerhalb der ersten zwei Lebensjahre aufgebaut [...].“[415] Die Vorstellung von dauerhaften Objekten geht also auf die aktive Tätigkeit eines Subjekts zurück, das zwei Wahrnehmungskomplexe miteinander vergleicht und das Ergebnis dieses Vergleiches auf eine bestimmte Art und Weise interpretiert.[416]

Der Einfluß des Subjektes beschränkt sich aber nicht darauf, zwischen möglichen Interpretationen zu entscheiden. Schon die Kriterien nach denen überhaupt über die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Wahrnehmungskomplexe entschieden wird, werden vom Subjekt selbst bestimmt. Bei einem Vergleich werden niemals alle Eigenschaften eines Wahrnehmungskomplexes berücksichtigt, sonst würden wir vermutlich nie zu dem Ergebnis der Gleichheit kommen. Gleichheit ist deswegen immer die Gleichheit der Eigenschaften eines Wahrnehmungskomplexes, die das Subjekt als relevant interpretiert.[417] „Das heißt, ein Erlebnis, das zum Beispiel aus den Elementen a, b und c besteht, kann einem Erlebnis aus a, b, c und x gleichgesetzt werden, solange x nicht in Betracht gezogen wird. Das ist das Prinzip der *Assimilation*. [...] Die Situation ändert sich jedoch, wenn ein Gegenstand, der zwar a, b, und c aufweist, sich in irgendeiner Weise anders verhält, als es von a-b-c-Gegenständen auf Grund bisheriger Erfahrung erwartet wird. Das bewirkt eine Störung (*perturbation*), die nun dazu führen kann, daß andere Bestandteile oder Eigenschaften in Betracht gezogen werden. Sobald das geschieht, ist die Möglichkeit geschaffen, den störenden (und darum in der gegebenen Situation unannehmbaren) Gegenstand auf Grund einer Eigenschaft x von den annehmbaren Gegenständen zu unterscheiden.“[418] Das ist das Prinzip der *Akkomodation*.[419]

Glasersfeld zeigt in Anlehnung an Piaget auch, wie weitere Vorstellungen, z.B. die von Kant als apriorisch angesehenen Vorstellungen von Raums und Zeit, durch das Subjekt aktiv konstruiert werden können und fährt dann fort damit, die Möglichkeit zur Konstruktion immer „höherer“ Begriffe darzustellen.[420]

Bei seiner Darstellung des radikalen Konstruktivismus argumentiert Glasersfeld philosophisch: angesichts der offensichtlichen Mängel des metaphysischen Realismus bietet der radikale Konstruktivismus ein alternatives Modell an, das erklären kann, wie unser Wissen von der Wirklichkeit zustande kommt. Wissen ist dabei nichts was passiv mit einer metaphysischen Wirklichkeit übereinstimmt, sondern wird in einem aktiven Prozeß vom Subjekt konstruiert. Nach seinen eigenen Kriterien kann der radikale Konstruktivismus natürlich auch von diesem Modell nicht sagen, daß es wahr ist, sondern

[415] Glasersfeld 1985: S. 32
[416] vgl. Glasersfeld 1985: S. 31ff
[417] vgl Glasersfeld 1985: S. 34
[418] Glasersfeld 1985: S. 34. Hervorhebungen dort. Mehr zum Vorgang der Assimilation findet sich bei Glasersfeld 1997: S. 113ff
[419] vgl. Glasersfeld 1997: S. 117ff
[420] vgl. Glasersfeld 1997

lediglich, daß es brauchbar ist, in dem Sinne, daß es in der Lage ist, zu erklären, wie Wesen zu Erkenntnis gelangen.

2.1.4.5 Die biologische Argumentationslinie

In den letzten Jahrzehnten bekam die konstruktivistische Sichtweise starke Unterstützung aus dem Bereich der Neurobiologie und der Wahrnehmungspsychologie. Ich gebe diese „biologistische“ Argumentationslinie hier stark verkürzt wieder:

- Das Gehirn kann die äußere Welt nicht direkt wahrnehmen. Damit wir etwas wahrnehmen können, muß ein Sinnesreiz auf ein Sinnesorgan treffen, von dem es in ein elektro-chemisches Signal umgewandelt und ans Gehirn weitergeleitet wird.
- Das Gehirn ist keine „Mattscheibe“, auf der durch diese Reize, die von den Sinnesorganen kommen, einfach ein Abbild der äußeren Welt erzeugt werden kann. Das Gehirn ist ein komplexes System, das sich aus sich selbst heraus ständig verändert, auch wenn keine Reize von den Sinnesorganen ankommen. Das Gehirn hat keine Möglichkeit zwischen solchen Reizen zu unterscheiden, die es selbst produziert und solchen, die von den Sinnesorganen kommen.
- Aus den Reizen, die die Sinnesorgane liefern und seinem eigenen Zustand, konstruiert das Gehirn das, was wir als „Wirklichkeit“ wahrnehmen. Das bedeutet, daß jede Wahrnehmung unter anderem an dem gemessen wird, was wir bisher „erlebt“ haben.
- Diese Wirklichkeitskonstrukte dienen nicht dazu, die Welt möglichst exakt wahrzunehmen, sondern das wahrzunehmen, was für das Überleben wichtig - *viabel* - ist. Deswegen nehmen wir das wahr, was für erfolgreiches Handeln wichtig ist. Das bedeutet, das Wahrnehmen und Handeln sehr eng miteinander verknüpft sind.
- Wir sind fähig zu Beobachtungen zweiter Ordnung, daß heißt wir können unsere Wahrnehmung beobachten und bewerten. Wenn wir dabei feststellen, das unsere Konstrukte von der Wirklichkeit nicht mehr angemessen (nicht mehr für unser Überleben oder unser Wohlbefinden förderlich) sind, sind wir in der Lage, diese Konstrukte zu ändern. Dieser Prozeß wird *Reframing* genannt. [421]

2.1.4.6 Verschiedene Spielarten konstruktivistischen Denkens

Vielleicht war es diese Unterstützung aus den Bereichen der Biologie und der Psychologie, die dazu führte, daß konstruktivistische Ideen in letzter Zeit so viel an Boden gewinnen konnten. Momentan scheint es eine richtige Konstruktivismusmode zu geben. In der Neurobiologie, der Wahrnehmungspsychologie, der Soziologie, der Philosophie und nicht zuletzt in Pädagogik und Didaktik, überall ist der Konstruktivismus in aller Munde. Schaut man sich jedoch die Publikationen zum Thema Konstruktivismus im einzelnen an, erkennt man, daß das was gemeint ist, wenn von Konstruktivismus geredet wird, bei weitem nicht immer dasselbe ist. Diese verschiedenen Verwendungsweisen des Begriffes muß man berücksichtigen, wenn man sich mit diese Thematik beschäftigen will, ohne heillos verwirrt zu werden.

- Zum ersten gibt es den *radikalen* Konstruktivismus, der sich hauptsächlich als Er-

[421] vgl. Gerstenmaier/Mandl 1995: S. 869ff und Meixner 1997: S. 19f

kenntnistheorie versteht, und den ich, in seiner von Glasersfeld propagierten Form, schon vorgestellt habe.[422]

- Zum zweiten gibt es den „neuen“ Konstruktivismus in Soziologie und Psychologie, der sich fragt, wie wir unser Wissen in Abhängigkeit von unserer kulturellen Situation aufbauen. Inzwischen hat sich für diese Richtung auch der Eigenname *sozialer* Konstruktivismus eingebürgert.[423]
- Und schließlich gibt es konstruktivistische Ansätze in der Didaktik und Pädagogik, die sich mit der Frage beschäftigen, wie dieser Aufbau von Wissen gefördert werden kann.[424]

Dabei ist zu beobachten, daß diejenigen, die einer konstruktivistischen Erkenntnistheorie anhängen, zwangsläufig auch in Fragen des Wissensaufbaus und der Didaktik konstruktivistisch denken. Vertreter des soziologischen oder psychologischen Konstruktivismus und einer konstruktivistischen Didaktik sind hingegen oftmals einem traditionellen Wissenschaftsverständnis verpflichtet und greifen mitunter die „radikalen“ Konstruktivisten scharf an. Andererseits kritisieren die „radikalen“ Konstruktivisten die „sozialen“ teilweise wegen der Halbherzigkeit ihres Ansatzes und wegen des Zurückfallens in ontologisch geprägte Sichtweisen.[425]

2.1.4.7 Sozialer Konstruktivismus

Der soziale Konstruktivismus stellt nicht den Anspruch, eine Erkenntnistheorie zu sein, wie der radikale Konstruktivismus. „Es handelt sich eher um Modellannahmen über die Alltagswelt, über abweichendes Verhalten oder über bestimmte Arten von Sozialbeziehungen, deren Gemeinsamkeit in ihrer Konstruktivität besteht.“[426] Der soziale Konstruktivismus geht dabei davon aus, daß die Alltagswirklichkeit, die der Mensch erlebt, durch die Kommunikationsprozesse innerhalb einer Gesellschaft erzeugt wird. Als wichtigstem Kommunikationsmittel des Menschen kommt deswegen der Sprache innerhalb der Theorie des sozialen Konstruktivismus zentrale Bedeutung zu. Wenn wir Sprechen, so ist das Gesprochene ein Ergebnis unserer Art, die Welt zu erleben; wenn andere hören was wir sagen, kann es die Wirklichkeit, in der sie leben, verändern. In dieser Weise ist Sprache sowohl “Produkt als auch Produzent menschlicher Wirklichkeit.“[427] Innerhalb des sozialen Konstruktivismus gibt es zahlreiche Schulen, die fast

[422] vgl. Gerstenmaier/Mandl, 1995: S. 868
[423] vgl. Gerstenmaier/Mandl, 1995: S. 868
[424] vgl. Gerstenmaier/Mandl, 1995: S. 868
[425] vgl. Glasersfeld 1997: S. 311ff
[426] Gerstmaier/Mandl 1995: S. 870
[427] Meixner 1997: S. 20

alle auf die Arbeit der Soziologen Berger und Luckmann zurückgehen; bei Gerstmaier und Mandl werden sie näher erörtert.[428]

Paul Ernest entwickelt in seinem Buch „The philosophy of mathematics Education“ eine vollständige, auf dem „sozialen“ Konstruktivismus aufbauende Philosophie der Mathematik als Grundlage einer Mathematikdidaktik. Im Mittelpunkt seiner Theorie steht dabei das Wechselspiel zwischen dem *subjektiven* mathematischen Wissen des einzelnen und dem *objektiven*, bzw. *intersubjektiven*[429] mathematischen Wissen, das durch die Akzeptanz der Darstellung des subjektiven mathematischen Wissens einzelner innerhalb eines Gemeinwesens konstituiert wird. Dieses intersubjektive, in der Gesellschaft z.B. in Form von Büchern vorhandene mathematische Wissen, bildet die Grundlage dafür, daß einzelne nun wieder die Gelegenheit haben, subjektives mathematisches Wissen zu entwickeln, daß durch Veröffentlichung und Akzeptanz zu intersubjektivem gesellschaftlichem Wissen werden kann, wodurch sich der Kreis schließt.[430]

Ernests Ansatz löst einige der Problem, mit denen die „traditionellen“ philosophischen Schulen der Mathematik, die ich im ersten Teil meiner Arbeit dargestellt habe, zu kämpfen hatten. Wenn die Gültigkeit mathematischer Aussagen lediglich von ihrer gesellschaftlichen Akzeptanz abhängt, ist es nicht notwendig, sich um ihre Übereinstimmung mit einer platonischen Ideenwelt, bzw. ihre axiomatische oder empirische Absicherung Sorgen zu machen. Notwendig sind lediglich Argumente, die in der Lage sind, andere zur Akzeptanz des eigenen mathematischen Standpunktes zu bewegen. Dadurch gelingt es Ernest auch, die empirischen Erfahrungen jedes einzelnen in den ständigen Prozeß der Weiterentwicklung der Mathematik zu integrieren, denn die mathematischen Konzepte, die dem einzelnen nicht zur Strukturierung seiner persönlichen Erlebniswelt dienlich sind, werden sich auch gesellschaftlich auf Dauer nicht durchsetzen.[431] Ernests Theorie ist sehr umfassend und sehr komplex, deshalb ist mir ihre umfassende Rezeption im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich. Ich empfehle bei Paul Ernest selbst nachzulesen.

2.1.4.8 Konstruktivistische Ansätze in Pädagogik und Didaktik

In den letzten Jahren haben sich verschiedene didaktische und pädagogische Positionen herausgebildet, die sich entweder auf den „radikalen“ oder auf den „sozialen“ Konstruktivismus beziehen. Dabei steht in der Regel die Einsicht im Mittelpunkt, daß Lernende ihr Wissen konstruieren, indem sie Erfahrungen in Abhängigkeit von ihrem

[428] vgl. Gerstmaier/Mandl, 1995: S. 870ff
[429] Ernest spricht hier von „objektivem Wissen“. Ich würde in diesem Zusammenhang den Begriff „intersubjektives Wissen“ bevorzugen, weil mit Objektivität nach wie vor die Übereinstimmung mit einer objektiven und unabhängig vom Beobachter existierenden Wirklichkeit assoziiert wird, auf die Ernest sich ausdrücklich nicht bezieht. (vgl. Ernest 1993: S. 46)
[430] vgl. Ernest 1993: S. 42ff
[431] vgl. Ernest 1993: S. 68ff

Vorwissen interpretieren und je nach Interpretation ihre bisherigen Wissenskonstrukte entweder ergänzen oder verändern. Daraus läßt sich weiter ableiten, daß:

- Neue Informationen an bestehende Erfahrungen oder an Vorwissen der Schüler anknüpfen müssen, damit sie sinnvoll mit schon bestehenden Wissenskonstrukten verknüpft werden können.
- Verschiedene Lernende die selben Objekte oder Lerninhalte verschieden wahrnehmen und interpretieren können.
- Informationen, die keinen Bezug zu einem von den Lernenden als wichtig eingestuften Kontext haben, kaum in die bisherigen Wissenskonstruktionen integriert werden.
- Die Entwicklung metakognitiver Fähigkeiten die Voraussetzung für die Entwicklung der Fähigkeit eines selbständigen und effektiven Lernens ist.[432]

Welche konkreten didaktischen und methodischen Konsequenzen sich jedoch aus diesen Einsichten ableiten lassen, darüber besteht keine Einigkeit.

Der *Anchored-Instruction-Ansatz* betont vor allem die Wichtigkeit *eines kognitiven Ankers*, „der Interesse erzeugt, den Lernenden die Identifizierung und Definition von Problemen erlaubt, sowie die Aufmerksamkeit der Lernenden auf das Wahrnehmen und Verstehen dieser Probleme lenkt.“[433] Aus diesem Grund wird großen Wert auf eine authentische Lernumgebung, explorierendes Lernen und die Anwendung neu erworbenen Wissens in verschiedenen Kontexten gelegt.[434] „So wird gleichzeitig Wissen über die Anwendung von Wissen erworben und damit die Flexibilität von Wissen unterstützt.“[435]

Für den *Cognitive-Flexibility-Ansatz* spielt die Betrachtung der zu lernenden Inhalte aus verschiedenen Perspektiven eine große Rolle. Dadurch sollen flexible Wissenskonstrukte aufgebaut werden, die sich in Problemsituationen auch entsprechend flexibel anwenden lassen.[436]

Beim Anchored-Instruction- und beim Cognitive-Flexibilty-Ansatz wird großen Wert auf die Gestaltung einer geeigneten Lernumgebung und das selbstgesteuerte Lernen des Schülers in dieser Umgebung gelegt. Ganz andere Schwerpunkte setzt der *Cognitive-Apprenticeship-Ansatz*. Er geht davon aus, daß Wissen am besten durch die direkte Interaktion mit Experten innerhalb authentischer Problemsituationen aufgebaut wird. Deshalb bietet er dem Lernenden solche Problemsituationen an, die er schrittweise mit immer weniger Hilfe des Experten selbst lösen kann.[437]

Näher möchte ich an dieser Stelle nicht auf die verschiedenen konstruktivistischen Ansätze in der Pädagogik und Didaktik eingehen. Auf diesem Gebiet wird in letzter Zeit intensiv geforscht und viele Ansätze sind meines Erachtens zwar bedenkenswert, aber noch nicht ausgereift. Auch empirische Untersuchungen, die letztendlich über die Leis-

[432] vgl. Gerstmaier/Mandl 1995: S. 874f
[433] Gerstmaier/Mandl 1995: S. 875
[434] vgl. Gerstmaier/Mandl 1995: S. 875f
[435] Gerstmaier/Mandl 1995: S. 876
[436] vgl. Gerstmaier/Mandl 1995: S. 876f
[437] vgl. Gerstmaier/Mandl 1995: S. 877f

tungsfähigkeit konstruktivistischer Methoden im Unterricht entscheiden müssen, stehen vielfach noch aus. Den interessierten Leser möchte ich an dieser Stelle auf die aktuelle Literatur verweisen. Der Aufsatz „Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive“ von Gerstenmaier und Mandl biete eine gute Grundlage für eine Auseinandersetzung mit der Thematik, gibt allerdings den Stand der Entwicklung von vor drei Jahren wieder. Aktuellere Aspekte finden sich in der Zeitschrift „schweizer schule“, die sich in der Ausgabe 6/97 ausschließlich dem Thema „Systemisch-konstruktivistische Didaktik“ widmet.

2.1.5 Konstruktivismus und Mathematik

Ich habe dem Konstruktivismus als alternativem Zugang zum Begriff der Wirklichkeit vor allem aus zwei Gründen so breiten Raum in meiner Arbeit eingeräumt. Zum einen, weil er es erlaubt, die Frage nach dem Wesen der Mathematik, deren Klärung sich im ersten Kapitel als außerordentlich schwierig erwies, in einem neuen Licht zu betrachten und zum anderen, weil unter dem Namen Konstruktivismus ein ganzes Bündel von Sichtweisen firmiert, die erst in jüngster Zeit breit diskutiert werden, so daß ich sie für die weitere Argumentation nicht als bekannt voraussetzen konnte.

Im Abschnitt „Symbiose“ meiner Arbeit zitierte ich Otte, der die Mathematik als Teil des „Gesamtunternehmens Wissenschaft“ bezeichnete. In Zusammenhang mit dem „radikalen“ Konstruktivismus erhält dieser Ausdruck eine sehr umfassende Bedeutung: Aus „radikal“ konstruktivistischer Sicht wird unser Wissen von der Wirklichkeit, durch unsere Wahrnehmungen konstituiert, die wir mit Hilfe geistiger Konstrukte strukturieren. Zu unseren Wahrnehmungen gehören aber nicht nur die Sinneswahrnehmungen - auch Gefühle und Gedanken werden wahrgenommen. Der Eindruck einer stofflichen äußeren Welt und einer geistigen inneren Welt, die getrennt voneinander existieren, beruht auf Konstruktionen des wahrnehmenden Subjektes.[438]

Vor diesem Hintergrund lösen sich die grundlegenden Unterschiede zwischen anwendungsorientierter und „reiner“ Mathematik auf. Mit Hilfe anwendungsorientierter Mathematik strukturieren wir die Wahrnehmungen, die wir als eine äußere Welt interpretieren, während wir mit Hilfe der „reinen“ Mathematik die Wahrnehmung strukturieren, die wir als unsere eigenen abstrakten Gedanken interpretieren. Da aber der Unterschied zwischen innerer und äußerer Welt lediglich auf Konstruktionen des wahrnehmenden Subjekts beruht, erweist sich auch der Unterschied zwischen „reiner“ und anwendungsorientierter Mathematik als Konstruktion.

So dient Mathematik immer dazu, Wahrnehmungen zu strukturieren und dadurch ein viableres Wissen von der Wirklichkeit aufzubauen. Damit wird sie tatsächlich zu einem Teil des *Gesamt*unternehmens Wissenschaft. Gelingt es einem aber, mit Hilfe der Mathematik Einsicht in die Konstrukte selbst zu erlangen, die unsere Wirklichkeit bestimmen, dann wird Mathematik zu einem echten Mittel der Selbsterkenntnis. In

[438] vgl. Glasersfeld 1997: S. 202

diesem Sinne kann wohl auch der Mathematiker und Theologe Nikolaus von Cues (1401 bis 1464) verstanden werden, wenn er schreibt: „Das Wassein des Seienden, das seine Wahrheit ausmacht, ist also in seiner Reinheit unerreichbar, von allen Philosophen zwar gesucht, von keinem aber wirklich gefunden; je tiefer wir in die wissende Unwissenheit eindringen, desto näher kommen wir der Wahrheit selbst.“[439]

Um Mißverständnissen vorzubeugen: Im letzten Abschnitt habe ich versucht, das Wesen der Mathematik auf einer sehr grundlegenden Ebene zu erörtern. Ich möchte dabei aber keineswegs behaupten, daß die Mathematik so *ist*, wie ich sie hier beschrieben habe, ich habe lediglich versucht, den Kern ihres Wesens auf eine Art und Weise zu beschreiben, die viabel ist, in dem Sinne, daß sie nicht die Widersprüche bisheriger Beschreibungen aufweist, die, wie ich im ersten Kapitel zeigte, zum Teil mit erheblichen Schwierigkeiten zu kämpfen haben.

Auch die Auflösung des Unterschiedes zwischen „reiner“ und angewandter Mathematik bitte ich nicht mißzuverstehen. Letztendlich halte ich den Unterschied zwischen innerer und äußerer Welt und den darauf beruhenden von „reiner“ und angewandter Mathematik für eine Illusion. Im „radikalen“ Konstruktivismus findet sich ein, diese Sichtweise stützendes Erklärungsmodell dafür, wie unser Wissen von Wirklichkeit aufgebaut werden könnte. Dabei kommt er ohne die metaphysischen Elemente aus, auf die sich ein immer noch von vielen Wissenschaftlern vertretener Subjekt-Objekt- Dualismus stützen muß. Im Alltag erleben wir aufgrund unserer Konstrukte ständig eine Trennung in eine äußere und eine innere Welt. Unter diesen Umständen erweisen sich die Begriffe „reine“ und anwendungsorientierte Mathematik, befreit von ihrem ideologischen Ballast, als sehr praktisch. Sie sind nützlich, wenn man gesellschaftliche Entwicklungsprozesse beschreiben will, wie ich es im ersten Kapitel dieser Arbeit getan habe und auch, wenn es darum geht, komplexe Aufgabenfelder und Prozesse aufzugliedern und haben dadurch ihre Berechtigung.

Ein Bindeglied zwischen dem oft ungewohnt und manchmal absurd erscheinenden Erklärungsmodell des „radikalen“ Konstruktivismus und unserer Alltagswelt kann der „soziale“ Konstruktivismus, in einer Form wie der von Ernest vertretenen, bieten, die ich weiter oben kurz angerissen habe. Im folgenden möchte ich mich dieser Alltagswelt, die wir alle so gut zu kennen glauben, wieder zuwenden.

[439] Cues, Nikolaus von: Die Kunst der Vermutung. Auswahl aus den Schriften. Bremen 1957. S. 78. Z. n. Meschkowski 1990: S. 38.

2.2 Lebenswirklichkeit

2.2.1 Die Welt in der wir leben

Ganz unabhängig davon wie die Wirklichkeit nun tatsächlich beschaffen ist, ob es möglich ist, auf irgendeine Weise Zugang zu ihr zu finden, sich ihr nach und nach anzunäheren oder ob sie sich nur durch die Beschränkungen offenbart, die sie uns setzt - unzweifelhaft ist: jeder von uns nimmt etwas wahr. Wir erleben uns selbst als Personen, die inmitten einer Welt voll von Dingen und Lebewesen agieren und uns kommt das alles sehr wirklich vor.

Unzweifelhaft ist auch, daß sich die Mathematik als ein sehr nützliches Werkzeug erweist, das es uns erlaubt, besser in dieser Welt zurechtzukommen - ganz unabhängig davon welche Sichtweise vom Wesen der Mathematik wir haben und ob wir glauben, daß sich die Mathematik als nützlich erweist, weil die Welt selbst mathematischen Gesetzen gehorcht, oder weil wir die Mathematik so gemacht haben, daß sie zu der Welt paßt in der wir leben.

Wir selbst, die Welt in der wir leben, und die Mathematik die wir verwenden, um uns in dieser Welt zurechtzufinden, verändern uns ständig. Vor Tausenden von Jahren lernte der Mensch, sich besser in seiner Umwelt zurechtzufinden, indem er anfing zu zählen. Heute leben wir in einer Welt, in der wir umgeben sind von technischen Geräten, die ohne enormen mathematischen Aufwand nicht gebaut und entwickelt werden könnten. Diesen mathematischen Ursprung sieht man aber den meisten dieser Geräte nicht mehr an, denn im Umgang mit ihnen braucht man gar keine oder kaum mathematische Kenntnisse. Wir leben heute auch in einer Welt, die sehr komplex ist. Über die Medien sind wir einer Unzahl ständig wechselnder Daten ausgesetzt, aus denen wir ständig die für uns wichtigen Informationen herausfiltern müssen.

2.2.2 Der Nutzen der Mathematik

Da sich Mathematik nicht von selbst lernt, müssen wir uns überlegen, welche mathematischen Kenntnisse in der Welt von heute wichtig sind und welche wir deswegen schwerpunktmäßig an die nachfolgende Generation weitergeben wollen. Denkt man dabei langfristig, so darf man nicht nur danach fragen, inwiefern die Mathematik dem einzelnen nützt, sich in dieser Gesellschaft zurechtzufinden, sondern man muß auch danach fragen, inwiefern die Mathematik dazu beiträgt, den Fortbestand unserer hochtechnisierten Informationsgesellschaft zu sichern. Nicht zuletzt müssen wir daran denken, was für das Bestehen und die Entwicklung der Mathematik selbst notwendig ist. Daß mathematisches Wissen durchaus wieder verloren gehen kann, wenn man seine Pflege vernachlässigt, läßt sich drastisch in der Übergangszeit von der Antike zum Mittelalter beobachten.
Mit der Bedeutung der Mathematik für den Einzelnen, die Gesellschaft und die Wissenschaft Mathematik setzt sich auch Hans Werner Heymann in seinem 1996 erschie-

nenen Buch „Allgemeinbildung und Mathematik“ sehr umfassend auseinander. Eine fundierte Rezeption seines Buches würde den Rahmen meiner Arbeit, die ihren Schwerpunkt eher im Bereich der philosophischen Grundlagen und der Entwicklung des Verhältnisses von angewandter und „reiner“ Mathematik hat, jedoch entschieden sprengen. Ich möchte den Leser deswegen an dieser Stelle auf Heymanns Buch selbst und seine kritische Diskussion in der Fachliteratur verweisen. Dabei empfehle ich vor allem die Ausgabe 97/2 des Zentralblattes für Didaktik der Mathematik. Dort diskutieren fünf Autoren „unter verschiedenen Blickwinkeln - als Bildungstheoretiker, Mathematiker, Lehrer oder Mathematikdidaktiker - das Heymann-Werk [...].“[440] Im folgenden werde ich lediglich auf einige Punkte hinweisen, die mir im Bezug auf mein Thema als besonders wichtig erscheinen und Anregungen zu einigen empirische Untersuchungen geben, die meines Erachtens auch im Rahmen wissenschaftlicher Hausarbeiten an einer pädagogischen Hochschule durchführbar und sinnvoll wären.

2.2.2.1 Nutzen der Mathematik für den Einzelnen

„Das Rechnen ist bei allen Arbeiten nützlich, die mit weltlichen, kultischen oder anderen ähnlichen religiösen Dingen zusammenhängen. Die Wissenschaft des Rechnens wird hoch geachtet in der Lehre der Liebe, in der Lehre vom Reichtum, in der Musik und im Drama, in der Kochkunst, in der Medizin, in der Architektur, bei der Silbenmessung, in der Dichtkunst und Poesie, in der Logik und Grammatik sowie in anderen Dingen. Sie wird verwendet im Zusammenhang mit der Bewegung der Sonne und anderer Himmelskörper, im Zusammenhang mit den Finsternissen und den Konjunktionen der Planeten sowie im Zusammenhang mit der Richtung, der Lage und der Zeit und mit dem Lauf des Mondes. Die Anzahl, die Durchmesser und Umfänge der Inseln, Ozeane und Berge, die Ausmaße der Ansiedlungen und der Gebäude, der Weltbewohner, der Räume zwischen den Welten, der Welt des Lichtes, der Welt der Götter und der Bewohner der Hölle und andere mannigfaltige Vermessungen, all das wird mit Hilfe der Mathematik bewerkstelligt.“[441] So heißt es in einer Schrift aus dem Indien des dritten Jahrhunderts n. Chr. über den Nutzen der Mathematik.

Wo liegt nun in der heutigen Zeit der Nutzen der Mathematik für den Einzelnen? Bei anwendungsorientierten und bei „reinen“ Mathematikern finden sich hier unterschiedliche Argumentationslinien. Für die anwendungsorientierten Mathematiker liegt der Nutzen in der konkreten Anwendung mathematischer Kenntnisse zur Lösung von Problemen des Alltags. Hier wird der Werkzeugaspekt der Mathematik in den Vordergrund gerückt, den ich im Abschnitt „1.3.6.2 Die Spaltung der Mathematik“ bereits angesprochen habe. Für die „reinen“ Mathematiker hingegen liegt der Nutzen der Mathematik zum einen in einer eher allgemeinen Schulung des strukturellen Denkens und zum anderen in der Freude, die der Umgang mit Mathematik bereiten kann. Ich werde auf beide Standpunkte im dritten Kapitel in Verbindung mit der Entwicklung des Ma-

[440] König 1997: S. 37
[441] Datta, B./Singh, A.N.: History of Hindu Mathematics. 2 Bde., Lahore 1935/1938. Z.n. Wußing 1989: S. 88. Deutsche Übersetzung von diesem entnommen aus: Juschkewitsch, A. P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964.

thematikunterrichts in Deutschland nochmals eingehen.[442]

Wenn man einem Standpunkt anhängt, der die Anwendbarkeit der Mathematik in den Vordergrund stellt, muß man sich natürlich immer wieder aufs Neue die Frage stellen, welches momentan die Probleme sind, die mit Hilfe des Werkzeuges Mathematik gelöst werden können und sollen. Damit man hier nicht gezwungen ist, aus dem hohlen Bauch heraus zu argumentieren, bieten empirische Untersuchungen ein gutes Mittel. Um sicherzustellen, daß die mathematischen Werkzeuge, die an die nachfolgende Generation weitergegeben werden, auch wirklich zu den Problemen passen, mit denen sie konfrontiert sein wird, schlage ich folgende in regelmäßigen Abständen zu wiederholende empirische Untersuchungen vor:

- Eine Erhebung des mathematischen Gehalts einer überregionalen Tageszeitung über den Zeitraum von beispielsweise einem Monat.
- Eine Erhebung des mathematischen Gehalts verschiedener Fernsehprogramme über einen Zeitraum von beispielsweise einer Woche.
- Eine Erhebung des mathematischen Wissens, das in vorwiegend von Hauptschulabsolventen ergriffenen Berufen benötigt wird. Dabei sollte die Erhebung nicht an Berufsschulen, sondern an den jeweiligen Arbeitsplätzen selbst stattfinden.
- Eine entsprechende Erhebung für vorwiegend von Realschülern ergriffene Berufe.
- Eine Erhebung über das in verschiedenen Studiengängen tatsächlich benötigte mathematische Wissen.

Die Ergebnisse dieser Studien könnten dann mit den jeweiligen Lehrplänen abgeglichen werden und zu ihrer Aktuellisierung dienen. Man verstehe mich hier nicht falsch - der Lehrinhalt des Faches Mathematik soll keineswegs auf das reduziert werden, was augenblicklich in den Medien und in verschiedenen Berufen und Studiengängen an Mathematik tatsächlich zu finden ist - aber es sollte auf jeden Fall sichergestellt werden, daß die dort auftretende Mathematik Bestandteil des Mathematikunterrichts in der Schule ist. Ich werde darauf im dritten Kapitel dieser Arbeit nochmals ausführlicher eingehen.

Die ganze Problematik, die mit der Aktualität der anwendungsorientierten Mathematk zusammenhängt, kann man vermeiden, wenn man sich auf die Position der „reinen“ Mathematiker stellt. In diesem Fall wird man sich jedoch damit auseinandersetzen müssen, ob die Beschäftigung mit den Inhalten der „reinen“ Mathematik tatsächlich das strukturelle Denken in einer Weise fördert, die dem einzelnen in seinem Alltag von Nutzen ist. Außerdem wird man sich überlegen müssen, was man mit den Menschen macht, die sich standhaft weigern bei der Beschäftigung mit Mathematik Freude zu empfinden.

2.2.2.2 Nutzen der Mathematik für die Gesellschaft

Den Nutzen der Mathematik für die Gesellschaft habe ich hier nicht zufällig zwischen den Nutzen der Mathematik für den einzelnen und die Sicherung und Weiterentwicklung der Mathematik gestellt. In einem komplexen Gemeinwesen wie dem menschli-

[442] vgl. Strehl 1979: S. 7f und den Abschnitt „Kampf um die Vorherrschaft“ meiner Arbeit.

chen kommt das, was der Gesellschaft nützt automatisch auch einer großen Zahl der Menschen zugute, die zusammen diese Gesellschaft bilden. Unsere Gesellschaft ist hochtechnisiert, das bringt enorme Vorteile, aber auch gravierende Nachteile mit sich. Wollen wir den technologischen Standard unserer Gesellschaft halten oder sogar noch weiterentwickeln (es gibt hier durchaus auch andere Ansichten[443]), so ist es nicht ausreichend, nur das mathematische Wissen weiterzugeben, das dem einzelnen dabei nützt sich in der Welt zurechtzufinden. Es wird eine große Anzahl von Menschen benötigt, die sich auf die Pflege, Weiterentwicklung und Anwendung mathematischen Wissens spezialisieren d.h. Menschen die sich auf die Mathematik als Wissenschaft spezialisieren.[444]

2.2.2.3 Sicherung und Weiterentwicklung der Mathematik

Wie ich bereits im Abschnitt „Entwicklung der Mathematik“ erörtert habe, nahm die Menge mathematischen Wissens und ihrer technischen Anwendungen in diesem Jahrhundert stark zu und es ist bislang kein Ende dieser Wachstumsprozesses in Sicht. Soll diese Entwicklung weitergeführt werden, so wird sich tatsächlich ein immer größerer Anteil der Bevölkerung der Wissenschaft Mathematik widmen müssen. Sollten jedoch eine Mehrheit der Gesellschaft zu dem Schluß kommen, daß diese Entwicklung nicht sinnvoll ist, dann wird es notwendig, sich sehr genau zu überlegen, wie es möglich ist, sie in geordnete Bahnen zu lenken, ohne das Kind mit dem Bade auszuschütten. Damit in einer demokratischen Gesellschaft einer solchen Frage zu einer sinnvollen Entscheidung kommen kann, muß sie öffentlich diskutiert werden. Dazu ist es notwendig, daß ein großer Teil der Bevölkerung über ausreichende mathematische Kompetenzen verfügt, um die Folgen einer solchen Entscheidung wenigstens ansatzweise abwägen zu können. Gleichgültig ob man der zunehmenden Technisierung der Welt zustimmend oder ablehnend gegenübersteht - ein fundiertes mathematisches Wissen ist in beiden Fällen wichtig.

[443] So schreibt Theodore Kaczynski, der als der „Unabomber“ bekannt wurde in der Einleitung seines Manifestes, dessen Veröffentlichung er durch Bombenanschläge erpreßte: „The Industrial Revolution and its consequences have been a disaster for the human race. They have greatly increased the life-expectancy of those of us who live in ‘advanced’ countries, but they have destabilized society, have made life unfulfilling, have subjected human beings to indignities, have led to widespread psychological suffering (in the Third World to physical suffering as well) and have inflicted severe damage on the natural world. The continued development of technology will worsen the situation. It will certainly subject human beings to greater indignities and inflict greater damage on the natural world, it will probably lead to greater social disruption and psychological suffering, and it may lead to increased physical suffering even in ‘advanced’ countries.“ (Kaczynski 1996) Bevor Theodore Kaczynski Bombenleger wurde, lehrte er Mathematik an der University of California. (vgl. Sacramento Bee 1998)

[444] vgl. Fischer 1988: S. 20ff

„Der Lehrer soll die Wissenschaft vor den Augen des Schülers entstehen lassen. Wie sie sich in dem Geiste des gereiften Denkers aus den ihm einwohnenden Grundvorstellungen entwickelt und gestaltet, so soll er sie, nur auf die jugendliche Fassungskraft eingerichtet, darstellen.“[445]

Karl Weierstraß

Kapitel 3: Didaktik

3.1 Vergangenheit

3.1.1 Die Weitergabe von Wissen

Es ist wohl ein menschliches Grundbedürfnis, einmal erlangtes Wissen weiterzugeben. Daher steht zu vermuten, daß einige der Probleme, die mit der Weitergabe mathematischen Wissens - mit Mathematikunterricht - zusammenhängen, ebenso alt sind wie die Mathematik selbst. Andere Problem kamen später hinzu: mit dem Anwachsen des mathematischen Wissens entstand die Notwendigkeit, die für die Schüler geeigneten Inhalte auszuwählen und mit der Einführung der Pflichtschule wurde es nötig, diese Inhalte verstärkt zu motivieren.

In diesem Kapitel möchte ich mich vorrangig mit dem aktuellen Mathematikunterricht an deutschen Schulen beschäftigen. Dieser Unterricht kann meines Erachtens aber nur vor dem Hintergrund der Entwicklung in der Mathematikdidaktik der letzten 100 Jahre wirklich verstanden werden, deswegen möchte ich diese Entwicklung zunächst kurz umreißen. Nach einer kritischen Diskussion des derzeitigen Mathematikunterrichts werde ich schließlich aufzeigen, welche Verbesserungsvorschläge sich aus meiner Arbeit für den derzeitigen Mathematikunterricht ableiten lassen.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts gab es in Deutschland zwei große didaktische Strömungen in der Mathematik, die beide den Anwendungsbezug der Mathematik in den Vordergrund stellten. Für den gymnasialen Bereich war das die *„Meraner Reformbewegung*“ und für den Volks- und späteren Haupt- und Realschulbereich das *„traditionelle“ Sachrechnen*. Beide Strömungen nahmen bis zur Einführung der

[445] Weierstraß, Karl: Mathematische Werke. Berlin 1894. Band 3, S. 315 - 329. Z.n. Meschkowski 1990.

„neuen" Mathematik mit den Nürnberger Lehrplänen von 1966 und teilweise darüber hinaus, großen Einfluß auf den Mathematikunterricht in Deutschland.[446]

3.1.2 Die „Meraner Reformbewegung"

Der zu Beginn dieses Jahrhunderts entstandenen „Meraner Reformbewegung" ging es um die Veränderung des Mathematikunterrichts an deutschen Gymnasien. Getragen wurde die Reformbewegung von Gymnasiallehrern, Naturwissenschaftlern und Mathematikern, wobei sich unter letzteren vor allem der Göttinger Mathematiker Felix Klein hervortat. Ein Hauptziel der „Meraner Reformbewegung" war es, den Mathematikunterricht stärker an der wissenschaftlichen Anwendung auszurichten. Aus diesem Grund wurde der Schwerpunkt des Mathematikunterrichts der gymnasialen Oberstufe im Bereich der Analysis und der analytischen Geometrie gelegt.[447] Zusätzlich wurde der Bezug des Mathematikunterrichts zu Alltagsproblemen eingefordert. Klein begründet diese so:

- Die Verbindung zur Anschauung und zu eigenen Erfahrungen motiviert die Schüler.
- Anwendungen bilden einen Teil der Mathematik und treiben die Mathematik voran.
- Die Mathematik ist ein nützliches Hilfsmittel für die Naturwissenschaften, den Beruf und das tägliche Leben.[448]

Klein greift hier teilweise die Argumente anwendungsorientierter Mathematiker auf, wie ich sie im Abschnitt „1.3.6.2 Die Spaltung der Mathematik" dieser Arbeit ausführlicher geschildert habe.

Im Zusammenhang mit der „Meraner Reformbewegungen" entstand eine rege Publikationstätigkeit. Außerdem wurde versucht, durch Veränderungen in der Lehrerbildung und über Lehrerfortbildungen Einfluß auf den Mathematikunterricht zu nehmen.[449] Das konkreteste Ergebnis der Bewegung war der 1905 veröffentlichte „Meraner Lehrplan", ein „zwischen Mathematik und Naturwissenschaft koordiniertes Gesamtwerk, in dem die einzelnen Fächer ihre Bedürfnisse aufeinander abgestimmt haben."[450] Nach dem ersten Weltkrieg führte vor allem der Mathematikdidaktiker Lietzmann die Bemühungen der Reformbewegung fort. Bereits in den zwanziger Jahren fordert Lietzmann fächerverbindenden Unterricht ein, wobei er die Mathematik vor allem mit den Bereichen Kunst, Werken, Staatsbürgerkunde, Wirtschaftslehre, Geodäsie, Astronomie und Physik verknüpfen wollte. Neben Lietzmann wurde die „Meraner Reformbewegung" vor allem von A. Walther und O. Toeplitz weitergetragen. Auch wenn der Ansatz der „Meraner Reformbewegung" den Anwendungsbezug betont, war er relativ ausgegli

[446] vgl. Beck 1979: S. 8ff
[447] Die Analysis beherrscht die gymnasiale Oberstufe nach wie vor, sie wird aber inzwischen hauptsächlich in Form schematischer und sinnleerer Kurvendiskussionen betrieben. Der Bezug zur Anwendung in der Wissenschaft ging weitgehend verloren.
[448] vgl. Beck 1979: S. 11ff
[449] vgl. Beck 1979: S.13ff
[450] Beck 1979: S. 15

chen, weil innermathematische Zusammenhänge nicht um der Anwendung willen vernachlässigt wurden.[451]

3.1.3 Das „traditionelle" Sachrechnen

Der anwendungsbezogene Mathematikunterricht an Gymnasien wurde stark von den Erfordernissen der Wissenschaft geprägt, wie ich sie im ersten Kapitel meiner Arbeit beschrieben habe. Der Sachrechenunterricht an der Volksschule läßt sich hingegen auf den Rechenunterricht der Rechenmeister während der Renaissance zurückführen.[452] Heutzutage versteht man unter Sachrechnen mehr oder weniger die Behandlung anwendungsorientierter Mathematik in der Schule[453]; das „traditionelle" Sachrechnen, das mitunter auch „bürgerliches" Rechnen genannt wird, umfaßt davon aber nur einen klar umrissenen Teil. Reinhard Strehl charakterisiert in seinem Buch „Grundprobleme des Sachrechnens" das „traditionelle" Sachrechnen in vier Punkten:

- Sachrechnen ist Rechnen mit *Stückzahlen* und *Maßzahlen.* Beim Sachrechnen werden quantitative Aussagen über Sachen gemacht. Dabei handelt es sich entweder um Aussagen über Stückzahlen oder über die Eigenschaften von Gegenständen wie: Länge, Flächeninhalt, Gewicht, Preis, die mit Hilfe von Maßzahlen ausgedrückt werden. Aufgabentypen werden dabei entweder nach den zu berechnenden Größen z.B.: Zinsrechnung, Mischungsrechnung, Gewinn- und Verlustrechnung oder nach dem Rechenweg z.B.: Prozentrechnung, Dreisatzrechnung, Verhältnisrechnung eingeteilt. Der eigentliche mathematische Gehalt der Aufgaben tritt dabei in den Hintergrund.[454]
- „Sachrechnen ist zugleich *Inhalt* und *Ziel* des Rechenunterrichts"[455]. In anderen Worten: in der Schule werden Sachrechenaufgaben geübt, damit die Schüler später im „wirklichen" Leben in der Lage sind, sachbezogene Rechnungen auszuführen.[456]
- Sachrechnen ist ein *„durchgängiges didaktisch-methodisches Prinzip"*[457]. Durch das didaktische Prinzip der Sachbezogenheit wird die Methodik des Rechenweges motiviert und eingeübt, die damit für die Bewältigung neuer Sachprobleme zur Verfügung steht.[458]
- Sachrechnen ist gegenüber dem *Mathematikunterricht* des Gymnasiums abgegrenzt. Das Sachrechnen soll den Schüler dazu befähigen, rechnerische Aufgaben, die ihm im Beruf und im täglichen Leben begegnen, zu lösen. Im Unterschied zum Mathematikunterricht am Gymnasium soll es den Schüler nicht zum abstrakten, mathematischen Denken führen.[459]

An diesen vier Punkten läßt sich erkennen, daß sich das „traditionelle" Sachrechnen

---

[451] vgl. Beck 1979: S. 15ff
[452] vgl. den Abschnitt „1.3.4.2 Vom Abakus zur Algebra" dieser Arbeit.
[453] Zu einer modernen Fassung des Sachrechenbegriffes vgl. Winter 1994: S. 11ff und die Begriffsdiskussion bei Glatfeld 1983 S. 40ff.
[454] vgl. Strehl 1979: S. 10f
[455] Strehl 1979: S. 11. Hervorhebungen dort.
[456] vgl. Strehl 1979: S. 11f
[457] Strehl 1979: S. 12. Hervorhebung dort.
[458] vgl. Strehl 1979: S. 12f
[459] vgl. Strehl S. 13f

noch stärker als die „Meraner“ Reformbewegung den Hilfsmittelstandpunkt der anwendungsorientierten Mathematiker zu eigen macht. Mathematik wird hier in Form weitgehend ausgearbeiteter Lösungsmodelle verwendet, um außermathematische Probleme zu lösen, eine darüber hinausgehende Auseinandersetzung mit der Mathematik findet nicht statt.[460]

3.1.4 Kritik des „traditionellen“ Sachrechnens

Mit der Zeit wurde die Kritik an der so charakterisierten traditionellen Form des Sachrechnens immer größer, bis es schließlich zu Beginn der 70er Jahre zu Gunsten der sogenannten „neuen“ Mathematik weitgehend aus den Lehrplänen verbannt wurde. Bei meiner Zusammenfassung dieser Kritikpunkte orientiere ich mich wieder an der Arbeit von Strehl.

- Dem traditionellen Sachrechnen „fehlte vielfach eine mathematisch befriedigende Klärung der verwendeten Begriffe und Verfahren.“[461] Schwachstellen waren hier z.B. die Unterscheidung zwischen Zahlen und Größen, der Begriff der Proportionalität als Grundlage der Dreisatzrechnung und der Umgang mit Formeln im Rahmen der Prozentrechnung. Durch die vernachlässigte Klärung der verwendeten Begriffe und der mathematischen Verfahren blieb den Schülern oft gar nichts anderes übrig, als das Gelernte unreflektiert und mechanisch anzuwenden.[462]
- „Gemeinsame Strukturen in verschiedenen Sachbereichen wurden zu wenig beachtet, eine Einordnung in allgemeinere mathematische Begriffsbildungen unterblieb vielfach ganz, und Querverbindungen zu anderen mathematischen Stoffgebieten wurden zu wenig berücksichtigt.“[463] So wurden zum Beispiel Prozent- und Zinsrechnung als unterschiedliche Sachbereiche mit verschiedenen Terminologien behandelt, ohne daß die mathematischen Gemeinsamkeiten herausgestrichen worden wären. Auch eine Herleitung der Prozentrechnung aus der Bruchrechnung war nach dem Konzept des „traditionellen“ Sachrechenunterrichts nicht vorgesehen.[464]
- Aufgaben, die mit den durch das Sachrechnen erworbenen Kenntnissen lösbar sind, kommen in der Realität, abgesehen von einzelnen Berufen, nur selten vor. Da die Schüler im traditionellen Sachrechnen hauptsächlich schematische Lösungsmethoden lernen, sind sie kaum in der Lage, ihr Wissen auf neue Probleme zu übertragen.
- Werden im Unterricht wirkliche Probleme behandelt, so müssen sie oft sehr stark vereinfacht werden, damit sie mit den mathematischen Mitteln der Schüler bearbeitbar sind. Dadurch verlieren sie ihren Realitätbezug weitgehend.
- Auf Grund dieser Schwierigkeit, werden oft anstelle wirklicher Probleme, sogenannte *eingekleidete Aufgaben* verwende. Sie illustrieren zwar die mathematischen

[460] vgl. den Abschnitt „1.3.6.2 Die Spaltung der Mathematik“ dieser Arbeit.
[461] Strehl 1979: S. 14
[462] vgl. Strehl 1979: S. 14
[463] Strehl 1979: S. 15
[464] vgl. Strehl 1979: S. 15

Verfahren und Zusammenhänge, stellen sich aber im außerschulischen Bereich so nicht.

- Da die Sachaufgaben die Schüler auf ihr späteres Leben vorbereiten sollen, sind sie häufig der Lebens- und Berufswelt Erwachsener entnommen. Sie beziehen sich also auf Probleme, die für die Schüler noch gar keine Probleme sind und wirken dadurch wenig motivierend.
- Dadurch, daß die im Sachrechnen behandelten Probleme oft nicht der Erfahrungswelt der Schüler entstammen, ist es für die Schüler schwierig den sachlichen Inhalt der Aufgaben kritisch zu hinterfragen. Dadurch entsteht die Gefahr, daß Schüler über Sachaufgaben manipulierbar werden. In Rechenbüchern aus der Zeit des Nationalsozialismus finden sich Aufgaben bei denen eine solche Manipulationsabsicht offensichtlich ist.[465]

Mit dem „traditionellen“ Sachrechnen wurde der Versuch unternommen, einige Aspekte der anwendungsorientierten Mathematik künstlich von ihren Wurzeln zu isolieren. Wie ich im ersten Kapitel meiner Arbeit gezeigt habe, entwickelten sich „reine“ und anwendungsorientierte Mathematik in einem steten Wechselspiel. Durch die Isolierung einzelner Anwendungen vom Rest der Mathematik verlieren diese zwangsläufig jede Flexibilität und sind nur noch auf einen sehr eng umrissenen Problemkreis anwendbar. Zur Zeit der Rechenmeister war dies noch ein sinnvolles Konzept, denn die Rechenmeister konnten ihren Schülern genau *die* mathematischen Kenntnisse beibringen, die sie Tag für Tag in ihrem beruflichen Alltag benötigten. Im Rahmen eines mathematischen Pflichtunterrichts, den alle Schüler unabhängig von ihrem späteren beruflichen Werdegang besuchen, ist dieses Konzept nicht mehr sinnvoll, da kein Lehrer mehr wissen kann, welche mathematischen Kenntnisse welcher Schüler später tatsächlich benötigen wird. Dies wiegt um so schwerer, angesichts einer Welt, die an diese Schüler immer komplexere und differenziertere Anforderungen stellt, die im Sachrechenunterricht überhaupt nicht im einzelnen behandelt werden können. Eine Lösungsmöglichkeit für diese Problematik schien Ende der sechziger Jahre die „neue“ Mathematik zu bieten.

3.1.5 Die „neue“ Mathematik

Am 3.10.1968 beschloß die Kultusministerkonferenz die „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen“[466]. Das war der offizielle Startschuß für die Einführung der „neuen“ Mathematik an deutschen Schulen. Zustande gekommen war dieser Beschluß nicht nur auf Grund der Probleme, die sich innerhalb der Schule in Zusammenhang mit dem „traditionellen“ Sachrechnen gezeigt hatten, sondern auch dadurch, „daß man der Schule von außen her, d.h. von der Wirtschaft, den Industrie- und Handwerkskammern und anderen berufsbildenden Institutionen her, ein Versagen ihres Rechenunterrichts vorwarf

[465] vgl. Strehl 1979: S. 15ff. Zur Manipulation durch Sachaufgaben wärend der Zeit des Nationalsozialismus vgl. Radatz 1984: S. 199 - 206

[466] Ein unveränderter Nachdruck dieser Richtlinien findet sich z.B. in Eckhard 1972: S. 165ff und in Meschkowski 1969: S. 483.

[...].“[467]

Die Probleme des „traditionellen“ Sachrechnens wurden hauptsächlich auf seine ungenügende mathematische Fundierung zurückgeführt. Infogedessen wurden innermathematische Zusammenhänge nun in den Mittelpunkt des Unterrichts gerückt. Zusätzlich wurde die Herausbildung von Qualitäten wie kontinuierliche Lernfähigkeit, flexibles und logisches Denken und die Fähigkeit Strukturen zu erkennen zu einem Ziel des Mathematikunterrichts erklärt. Die Inhalte und Methoden des „traditionellen“ Sachrechnens mußten dafür in den Hintergrund treten. Auf diese Weise hoffte man den Anforderungen einer immer komplexer werdenden Welt gerecht zu werden.[468] „In der Tat kann man in der Förderung solcher Fähigkeiten wie Analysieren, Abstrahieren, Ordnen, Schlußfolgern, Verallgemeinern und systematische Fallunterscheidungen treffen eine heutigen Lebensumständen angemessene Form der Lebensnähe im Mathematikunterricht und somit eine alternative zum traditionellen Sachrechnen sehen.“[469]

Man hoffte dabei, daß es den Schülern möglich wäre, diese Fähigkeiten durch den Umgang mit innermathematischen Problemen und Methoden unabhängig von der speziellen Anwendung zu entwickeln. Zur Motivation der Schüler setzte man dabei vor allem auf „eine Umsetzung mathematischer Begriffe und Strukturen in mathematische Spielen“[470] und den Einsatz strukturierter Lernmaterialien. Die mathematische Grundlage für den „neuen“ Mathematikunterricht bildete dabei die Mengenlehre und ihre Weiterführung in der Strukturmathematik des Bourbakikreises,[471] auf die ich im ersten Kapitel meiner Arbeit bereits ausführlich eingegangen bin. Unter den Argumenten, die bei der Einführung des „neuen“ Mathematikunterrichts angeführt wurden, befinden sich vor allem zwei, die auch allgemein zur Rechtfertigung einer „reinen“ Mathematik verwendet wurden. Mathematik kann - auch Schülern - um ihrer selbst willen Spaß machen und muß deswegen nicht außermathematisch motiviert werden. Außerdem stellen mathematische Methoden „potentielle Werkzeuge“ dar, die immer wieder auf ganz verschiedene Probleme angewandt werden können; deswegen sind sie den von ihrer mathematischen Wurzel weitgehend isolierten Methoden des „traditionellen“ Sachrechnens überlegen.[472]

3.1.6 Kritik der „neuen“ Mathematik

Die große Schwierigkeit des „neuen“ Mathematikunterrichts war, daß die von ihm unterstellte Übertragbarkeit der geleisteten Denkerziehung auf reale Probleme genausowenig nachweisbar war wie die Anwendbarkeit der im „traditionellen“ Sachrechnen erworbenen Kenntnisse. Man ging einfach davon aus, daß dieser Transfer von abstrak-

[467] Strehl 1979: S. 20
[468] vgl. Eckhardt 1972: S. 165ff und Strehl 1979: S. 20
[469] Strehl 1979: S. 20
[470] Strehl 1979: S. 20
[471] Beck spricht in Zusammenhang mit der Umsetzung der bourbakischen Strukturmathematik in der Schule in Anlehnung an Kapur von „Baby-Bourbaki“. (vgl. Beck 1979: S. 128)
[472] vgl. den Abschnitt „ 1.4.2.1 Die Argumente der ‘reinen’ Mathematiker“ dieser Arbeit.

ten mathematischen auf reale Strukturen schon irgendwie stattfinden würde.

Nach dem bisherigen Stand der psychologischen Erkenntnis ist eine solche Annahme jedoch nicht gerechtfertigt. Damit ein Transfer von einer Lern- oder Problemsituation auf eine andere stattfinden kann, muß für den Schüler eine Verbindung zwischen diesen Situationen z.B. in Form gemeinsamer Elemente oder einer gemeinsamen Struktur bestehen. Ein Kind kann den „Begriff der Gruppe lernen, indem es in einem Abstraktionsprozeß die gemeinsame Struktur verschiedener mathematischer Spiele erfaßt. Nun wird es aber im außerschulischen Bereich weder den benutzten Lernmaterialien oder ähnlich streng strukturierten Objekten noch der Gruppenstruktur in einer Problemsituation wieder begegnen, so daß sowohl gemeinsame Elemente als auch gemeinsame Strukturen als Voraussetzung einer Lernübertragung von der Mathematik zur Umweltsituation hin fehlen.“[473]

Beck führt noch weitere Kritikpunkte am „neuen“ Mathematikunterricht an:

- Die Schüler erfahren in zweifacher Hinsicht ein verzerrtes Bild der Mathematik: Indem die Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Anwendung vernachlässigt wird, entsteht leicht die falsche Vorstellung, Mathematik würde ausschließlich um ihrer selbst Willen betrieben und indem die „neue“ Mathematik als Mathematik schlechthin präsentiert wird, verlieren die Schüler die geschichtliche Entwicklung der Mathematik aus dem Blick, die sie erst zu dem gemacht hat, was sie heute ist.[474]
- Der „neue“ Mathematikunterricht ist nicht kindgemäß, da er nicht an die Erfahrungswelt des Kindes anknüpft und den Kindern keinen Zugang zur Mathematik in Form einer kindgemäßen Sprache bietet.[475]

Wegen dieser gewichtigen Kritikpunkte, weil von außen Klagen über die mangelnde Rechenfähigkeit der Schüler an die Schulen herangetragen wurden[476] und nicht zuletzt vermutlich deswegen, weil sich viele Lehrer nicht mit der „neuen“ Mathematik anfreunden konnten, bestimmte sie den Unterricht an deutschen Schulen nicht sonderlich lange.

Spiegelten sich in den bisher an den Schülern „ausprobierten“ didaktischen Konzeptionen des „traditionellen“ Sachrechnens und der „neuen“ Mathematik, die Sichtweisen anwendungsorientierter und „reiner“ Mathematiker deutlich wieder, so wurden nun die Stimmen lauter, die einen „ausgewogener“ Mathematikunterricht forderten.[477]

3.1.7 Ausgewogener Mathematikunterricht

Strehl sieht einen ausgewogener Mathematikunterricht, der die oben geschilderten Probleme des „traditionellen“ Sachrechnens und der „neuen“ Mathematik vermeidet, in

[473] Strehl 1979: S. 22
[474] vgl. Beck 1979: S. 125
[475] vgl. Beck 1979: S. 126
[476] vgl. Strehl 1979: S. 20 (Fußnote)
[477] vgl. z.B. Beck 1979: S. 118ff und Strehl 1979: S. 22ff

der Verwendung „mathematisch-struktureller Betrachtungsweisen *bei* Sachproblemen.“[478] Dieses Konzept erläutert er folgendermaßen: „Beim Erarbeiten rein mathematischer Begriffe und Strukturen sollten nicht nur dafür konstruierte mathematische Spiele, strukturierte Lernmaterialien und dergleichen eingesetzt werden - obwohl deren Sinn hier nicht bestritten wird - sondern soweit wie irgend möglich sollte man stets auch Beispiele und Modelle aus der Umwelt des Kindes heranziehen. [...] Beim Umgang mit Sachproblemen und dem Stoff des traditionellen Sachrechnens, den wir durchaus für wichtig halten, muß stärker als bisher auf die zugrunde liegenden Strukturen und Begriffe hingearbeitet werden. Dabei geht es jedoch nicht nur um bessere Einsicht in die benuzten rechnerischen Verfahrensweisen [...] sondern es geht durchaus um Entwicklung und Schulung mathematischen Denkens, wie es die Bemühungen zur Reform des Mathematikunterrichts in den Vordergrund gestellt haben.“[479]

Becks Vorstellungen von einem ausgewogenen Mathematikunterricht ähnelt der von Strehl. Während Strehl seine Position aber hauptsächlich mit didaktischen Argumenten begründet, argumentiert Beck - ähnlich wie ich selbst das im ersten Kapitel dieser Arbeit getan habe - mit der gegenseitigen Abhängigkeit von anwendungsorientierter und „reiner“ Mathematik innerhalb der Wissenschaft Mathematik. Dabei stellt er sich auf den Standpunkt, daß der Mathematikunterricht auch die Aufgabe hat, den Schülern ein möglichst unverzerrtes Bild der Wissenschaft Mathematik zu vermitteln.[480]

Dieses am Ende der 70er Jahre noch „innovative“ Konzept eines ausgewogenen Mathematikunterrichts hat sich inzwischen breit durchgesetzt und wurde in den Lehrplänen verankert.[481] Damit hat der Mathematikunterricht in Deutschland zu einem Ausgleich zwischen den bisher verfolgten einseitigen didaktischen Konzeptionen des „traditionellen“ Sachrechnens und der reinen Mathematik gefunden. Man sollte meinen nun sei alles gut...

---

[478] Strehl 1979: S. 22f. Hervorhebung dort.
[479] Strehl 1979: S. 22f
[480] vgl. Beck 1979: S. 76ff
[481] vgl. hierzu den Abschnitt „3.2.2 Der Bildungs - und Lehrplan für die Realschulen in Baden -Württemberg“ dieser Arbeit.

3.2 Gegenwart

3.2.1 TIMSS das Schreckgespenst

Im Januar 1997 wurde die TIMSS-Studie den deutschen Kultusministern vorgelegt, einige Monate später kam sie in den Buchhandel. Bei der **T**hird **I**nternational **M**athemathics and **S**cience **S**tudy, handelt es sich um eine breit angelegte empirische Studie, in der anhand von Aufgaben, die mit den jeweiligen Lehrplänen abgestimmt wurden, die Mathematikkenntnisse von Schülern aus 45 Ländern verglichen wurde.[482] In der Presse sorgte die Studie für großen Wirbel, denn deutsche Schüler schnitten dabei nur mittelmäßig ab. Sofort standen Didaktiker und Bildungspolitiker bereit, die aus der TIMSS haarklein folgern konnte, wo die Probleme des Mathematikunterrichts lagen und was zu ihrer Lösung zu tun sei.[483] Das aber ist - der Konzeption der Studie nach - überhaupt nicht möglich. Die TIMSS zeigt zwar, daß die Leistung vieler Schüler hinter den Erwartungen zurückbleiben, sie läßt aber nur in sehr begrenztem Maße Rückschlüsse darauf zu, ob dafür methodische, didaktische, strukturelle oder soziologische Ursachen verantwortlich sind. Die TIMSS ist ein Mittel der Standortbestimmung, nicht der Ursachenforschung und erst recht nicht der Lösungssuche, denn für eine Lösungssuche wären zusätzliche Überlegungen darüber notwendig, was eigentlich die Ziele sind, die man mit dem Mathematikunterricht verfolgt.

3.2.2 Der Bildungs- und Lehrplan für die Realschulen in Baden-Württemberg

Wenn die TIMSS auch keine Lösungswege aufzeigen kann, so gibt sie doch Hinweise darauf, daß auch mit dem „ausgewogenen“ Mathematikunterricht einiges im Argen liegt. Im folgenden möchte ich versuchen herauszufinden wo die Probleme liegen, indem ich die Analyse eines aktuellen Bildungs- und Lehrplanes zu meinen bisherigen Erörterungen in Beziehung setze. Ich habe dazu den Bildungs- und Lehrplan für die Realschulen in Baden-Württemberg ausgewählt, weil mich mein derzeitiges Studium auf das Lehramt an diesen Schulen vorbereiten soll. An Hand von Zitaten aus dem Bildungsplan werde ich zunächst aufzeigen, daß tatsächlich ein ausgewogener Mathematikunterricht angestrebt wird, danach werde ich mit Hilfe des Lehrplanes untersuchen, wie dieser ausgewogene Ansatz umgesetzt werden soll.

3.2.2.1 Didaktische Grundsätze des Bildungsplans

Daß im Bildungsplan ein ausgewogener Mathematikunterricht im Sinne Strehls und anderer Didaktiker propagiert wird, wird einem schon beim Lesen des zweiten Absatzes klar, der im Bildungsplan zum Fach Mathematik zu finden ist. Dort heißt es:

---

482 vgl. Baumert 1997: S. 33ff und Kraus 1997: S. 3
483 vgl. Kraus 1997: besonders S. 9f

- „Die Schülerinnen und Schüler werden mit mathematischem Denken und mathematischen Verfahren vertraut, die ihnen helfen, Zustände und Vorgänge ihrer Umwelt durch Modelle zu beschreiben und quantitativ zu erfassen.“[484]

Diese Verbindung von abstrakter Mathematik und konkreter Anwendung wird noch an zwei weiteren Stellen eingefordert:

- „Sie (die Schüler) lernen konkrete Anschauung und abstraktes Denken, logische Analyse und Synthese zu verbinden.“[485]
- „In den weiteren Schuljahren soll behutsam der Übergang zu einem formal-abstrakten Denken erfolgen. Diese Entwicklung wird wirksam unterstützt, wenn immer wieder in angemessener Weise auf die konkrete Anschauung und bildliche Darstellung zurückgegriffen wird.“[486]

Zur weiteren Erläuterung des Anwendungsaspektes im Mathematikunterricht finden sich im Bildungsplan folgende Zitate:

- „Sie (die Schüler) lernen, Daten zu sammeln und sachgerecht zu bearbeiten, zu messen, zu schätzen, zu überschlagen, zu berechnen, Schaubilder herzustellen und Ergebnisse zu interpretieren. Sie erfahren die Anwendbarkeit der Mathematik, die es ermöglicht, Problemstellungen aus der Umwelt zu erschließen zu bewältigen und zweckmäßige Entscheidungen zu treffen [...].“[487]
- Eines der Ziele des Mathematikunterrichts ist das „Mathematisieren konkreter Sachverhalte und Interpretieren mathematischer Aussagen in konkreten Zusammenhängen.“[488]
- „Anwendungsorientierter Unterricht, der Fragen aus der Umwelt der Schülerinnen und Schüler aufgreift, erzeugt Neugier und Erwartung und weckt dadurch die Lernbereitschaft.“[489]

Aber auch die Aspekte, die der „neue“ Mathematikunterricht betonte und die mit dem Konzept einer „reinen“ Mathematik in Verbindung stehen, kommen nicht zu kurz:

- „Sie (die Schüler) lernen, zu beobachten und nach Gesetzmäßigkeiten zu suchen, zu ordnen und zu klassifizieren, zu verallgemeinern und zu spezifizieren, zu kombinieren und zu variieren. Dadurch wird kreatives, intuitives Denken, ein wesentliches Merkmal der Mathematik, gefördert.“[490]
- „Sie lernen, rational zu argumentieren; dazu gehört, Bedingungen anzuerkennen, zu definieren, zu formulieren, zu begründen, zu analysieren und Aussagen zu überprüfen.“[491]

[484] Ministerium 1994: S. 22
[485] Ministerium 1994: S. 23
[486] Ministerium 1994: S. 23
[487] Ministerium 1994: S. 23
[488] Ministerium 1994: S. 23
[489] Ministerium 1994: S. 23
[490] Ministerium 1994: S. 22
[491] Ministerium 1994: S. 23

- „Die mathematische Fachsprache einschließlich der Mengensprechweise ist überall dort zu verwenden, wo sie es ermöglicht, mathematische Sachverhalte für die Schülerinnen und Schüler übersichtlicher und präziser zu formulieren, als es die Umgangssprache erlaubt.“[492]

Wie sich aus diesen Zitaten erkennen läßt, fordert der Bildungsplan Aspekte der angewandten und der „reinen“ Mathematik nicht nur nebeneinander zu Stellen, sondern zu einem Ganzen zu verbinden. Inwiefern sich diese hohen Ansprüche des Bildungsplanes auch in den konkreteren Ausführungen des Lehrplans wiederfinden, werde ich im folgenden untersuchen.

3.2.2.2 Schwerpunktsetzungen im Lehrplan Mathematik

In jedem Schuljahr ist eine Lehrplaneinheit allein dem Sachrechnen vorbehalten. Im folgenden Liste ich kurz die Themen dieser Lehrplaneinheiten auf und gebe außerdem den vorgesehenen Anteil an der Stundenzahl des Faches Mathematik an:

• Lpe. 5.3[493]	Sachrechnen: Zweisatz	ca. 15 %
• Lpe. 6.4	Sachrechnen: Dreisatz	ca. 10 %
• Lpe. 7.4	Sachrechnen: Dreisatz, Prozentrechnen	ca. 21 %
• Lpe. 8.4	Sachrechnen: Zins- und Prozentrechnen	ca. 11 %
• Lpe. 9.4	Sachrechnen: (komplexe Prozentrechnungen)	ca. 17 %
• Lpe. 10.4	Sachrechnen: (Vermischtes, haupts. Prozentr.) [494]	ca. 11 %

In diesen Lehrplaneinheiten finden sich viele Inhalte des „traditionellen“ Sachrechnens wieder. Dabei wird teilweise (in Klasse 6 und 7) auf die hinter der Anwendung stehenden mathematische Zusammenhänge wie z.B. *Proportionalität* ausdrücklich hingewiesen. Betrachtet man den Anteil der Lehrplaneinheiten zum Sachrechnen am gesamten Mathematikunterricht, so scheint er relativ gering. Hinweise auf Anwendungsbezüge finden sich aber noch in weiteren Lehrplaneinheiten wieder:

- Lpe. 5.1: *Natürliche Zahlen*
  „Der Anwendungsbezug wird durch vielfältiges Einbeziehen von Größen hergestellt und in Aufgaben aus der Umwelt vertieft.“[495]
- Lpe. 5.2: *Grundlegende geometrische Kenntnisse, Achsenspiegelung, Schiebung*
  „Anwendungsaufgaben“[496]

---

[492] Ministerium 1994: S. 24
[493] Ich kürze hier ab. „Lpe.“ steht für Lehrplaneinheit. Die erste Zahl bezeichnet das Schuljahr, die zweite die Nummer der Lehrplaneinheit.
[494] vgl. Ministerium 1994: S. 73ff
[495] Ministerium 1994: S. 73
[496] Ministerium 1994: S. 74

- Lpe. 6.1: *Bruchzahlen in Bruchschreibweise*
  „An konkreten Sachverhalten erfahren die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit der Erweiterung des bisherigen Zahlbereichs und ihrer Zahlvorstellung.“[497]
- Lpe. 6.2: *Bruchzahlen in Dezimalschreibweise*
  „Insbesondere Rechnen mit Größen“, „Anwendungsaufgaben“[498]
- Lpe. 7.2: *Lineare Gleichungen mit einer Variablen*
  „Die Schülerinnen und Schüler erhalten Einblicke in mathematische Denkweisen, die ihnen helfen, in zunehmendem Maße ihre Umwelt durch mathematische Modelle zu erschließen.“[499]
- Lpe. 8.1: *Terme mit Variablen, Gleichungen mit einer Variablen*
  „In Anwendungsaufgaben wird die Fähigkeit vertieft, Aspekte aus der Umwelt mathematisch zu erfassen.“[500]
- Lpe. 8.2: *Lineare Funktionen, Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen*
  „Sie erwerben die Fähigkeit, einfache funktionale Zusammenhänge aus ihrer Erfahrungswelt und den naturwissenschaftlichen Fächern mathematisch zu erfassen, darzustellen und zu interpretieren. Bei Anwendungsaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, Variablen aufgabenbezogen festzulegen und zu verwenden.“[501]
- Lpe. 9.3: *Kreis, Zylinder, Kugel*
  „Anwendungsaufgaben“
- Lpe. 10.1: *Quadratische Funktionen und Gleichungen*
  „Die Schülerinnen und Schüler lernen, quadratische Gleichungen, die Grundlage vieler Anwendungen sind, sicher und rationell zu lösen.“[502]
- Lpe. 10.2: *Trigonometrie*
  „Aus Beziehungen zwischen Winkeln und Strecken im rechtwinkligen Dreieck gewinnen die Schülerinnen und Schüler trigonometrische Begriffe, die bei Berechnungen in zahlreichen Gebieten angewandt werden.“[503]
- Lpe. 10.3: *Körperberechnungen*
  „Anwendungsaufgaben“[504]

Durch die vorliegende Integration des Anwendungsbezuges in eher innermathematisch orientierte Lehrplaneinheiten erhöht sich das Gewicht der anwendungsbezogenen Mathematik innerhalb des Lehrplans. Dabei soll in diesen Lehrplaneinheiten teilweise anhand konkreter Sachverhalte die Einführung neuer mathematischer Inhalte, beispielsweise der Bruchzahlen in Lehrplaneinheit 6.1, motiviert werden. In der Regel sieht der Lehrplan aber lediglich vor, die neu erlernten mathematischen Verfahren gegen Ende der Lehrplaneinheit in „Aufgaben aus der Umwelt“[505] oder ähnlichem anzu-

[497] Ministerium 1994: S. 120
[498] Ministerium 1994: S. 120
[499] Ministerium 1994: S. 176
[500] Ministerium 1994: S. 239
[501] Ministerium 1994: S. 239
[502] Ministerium 1994: S. 387
[503] Ministerium 1994: S. 387
[504] Ministerium 1994: S. 388
[505] Ministerium 1994: S. 239. Ähnliche Formulierungen finden sich am Ende der meisten Lehrplaneinheiten mit Anwendungsbezug.

wenden. Schließlich gibt es noch eine Reihe von Lehrplaneinheiten, in denen ein Anwendungsbezug überhaupt nicht vorgesehen ist:

- Lpe. 6.3: Grundlegende geometrische Kenntnisse, Drehung, Punktspiegelung
- Lpe. 6.5: Terme mit Platzhaltern
- Lpe. 7.1: Ganze und rationale Zahlen
- Lpe. 7.3: Dreiecke
- Lpe. 8.3: Vierecke, Vielecke und Prismen
- Lpe. 9.1: Potenzen und Wurzeln, Rein-quadratische Funktionen und Gleichungen
- Lpe. 9.2: Zentrische Streckung, Satz des Pythagoras[506]

Verständlich ist dieses Ausklammern des Anwendungsbezuges bei den Lehrplanei nheiten zur Geometrie, die bereits in der Antike als Inbegriff der „reinen" Mathematik galt. Etwas sonderbar ist hingegen das Fehlen eines Anwendungsbezuges bei der Lehrplaneinheit 9.1: „Potenzen und Wurzeln, Rein-quadratische Funktionen und Gleichungen", denn hier bieten sich zahlreiche Anwendungen, vor allem in den Naturwissenschaften an. Auch zur Lehrplaneinheit 7.1: „Ganze und Rationale Zahlen" ließen sich sicherlich Anwendungen finden.

Vergleicht man den Lehrplan mit dem Bildungsplan, so muß man feststellen, daß die konkrete Umsetzung im Lehrplan den hohen Ansprüchen des Bildungsplanes nicht wirklich gerecht wird.

- Die Lehrplaneinheiten, die sich ausdrücklich mit Sachrechnen beschäftigen und in denen sich vor allem Inhalte des traditionellen Sachrechnens finden wie Rechnen mit Größen, Dreisatzrechnung, Prozent und Zinsrechnen, stehen sehr stark für sich und werden kaum mit den anderen Lehrplaneinheiten verknüpft.
- In den meisten der Lehrplaneinheiten, in denen der Schwerpunkt auf den mathematischen Verfahren und Inhalten liegt, auf Anwendungsbezüge jedoch hingewiesen wird, sieht der Lehrplan explizit lediglich einige „Anwendungsaufgaben" oder „Aufgaben aus der Umwelt" vor. Das macht ein wenig den Eindruck, als sei der Anwendungsbezug hier nachträglich in den Lehrplan hineingeschustert worden.
- Es gibt Lehrplaneinheiten, bei denen das völlige Fehlen eines Anwendungsbezuges nicht verständlich ist, zum Beispiel die Lehrplaneinheit 9.1: „Potenzen und Wurzeln, Rein-quadratische Funktionen und Gleichungen".
- Auch dem Anspruch des Bildungsplanes, daß die Schüler lernen „Zustände und Vorgänge *ihrer* Umwelt durch Modelle zu beschreiben und quantitativ zu erfassen"[507] wird der Lehrplan nur bedingt gerecht. Ich möcht darauf im folgenden Abschnitt näher eingehen.

[506] vgl. Ministerium 1994: S. 73ff
[507] Ministerium 1994: S. 22. Hervorhebung von mir.

3.2.2.3 Der Inhalt des Lehrplans und die Probleme der Renaissance

Im Abschnitt „1.3.4.1 Die Umstände der Geburt" meiner Arbeit erläutere ich unter anderem inwieweit Mathematik in der Renaissance zur Lösung von Alltagsproblemen verwendet wurde. Im Zusammenhang mit dem Handel kamen vor allem: „Zahlenschreibweise, Umrechnung verschiedenartigster Währungs-, Gewichts- und Maßeinheiten ineinander, Zins- und Zinseszinsrechnung, Erweiterung des Zahlbereiches, Ausbildung von zweckmäßigen Rechenverfahren"[508] und natürlich die Dreisatzrechnung zur Anwendung; in Verbindung mit der Navigation kam noch die Trigonometrie hinzu.

Ein Realschüler von heute wäre auf den Umgang mit den Problemen der Renaissance bestens vorbereitet:

- In Lpe. 5.1 lernt er etwas über die „Darstellung und Anordnung natürlicher Zahlen", das „Umwandeln von Größen" und über „Rechenvorteile und Rechengesetze".[509]
- In Lpe. 5.3 stehen nochmals die „Größen (Geldwert, Länge, Gewicht, Zeit)" und die „Maßumwandlung" auf dem Programm.[510]
- In Lpe. 6.1 erfährt er die „die Notwendigkeit der Erweiterung des bisherigen Zahlbereichs".[511]
- In Lpe. 6.2 lernt er die Dezimalbruchschreibweise beim Rechnen mit Größen kennen,[512] die auch schon in der Renaissance durch den Niederländer Stevin eingesetzt wurde.[513]
- In Lpe. 6.3 wird die Dreisatzrechnung eingeführt.[514]
- In den Lpe. 7.4, 8.4, 9.4, und 10.4 wird Prozent und Zinsrechnen geübt.
- In Lpe. 10.2 schließlich kann sich der Schüler grundlegende Trigonometrische Kenntnisse aneignen.[515]

Der Lehrplan von heute deckt also den Bedarf des Renaissancemenschen an Mathematik gut ab. Was die anwendungsorientierte Mathematik betrifft, bietet er darüber hinaus relativ wenig: ein paar Anwendungsaufgaben in Zusammenhang mit Termen, linearen Gleichungen und Funktionen, quadratischen Gleichungen und Funktionen und sonst praktisch nichts.

Unterscheiden sich die Probleme, mit denen der Mensch von heute konfrontiert ist, so wenig von den Problemen des Renaissancemenschen, daß dieser Lehrplaninhalt gerechtfertigt ist? Mit Sicherheit nicht! In den Abschnitten „1.3.5 Mathematik in Bewegung", „1.3.6 Grundlegende Mathematik" und „1.3.8 Auf dem Weg in die Zukunft", habe ich gezeigt, wie sich mit der Entwicklung der naturwissenschaftlichen Methode,

[508] Wußing 1989: S. 110
[509] Zitate aus Ministerium 1994: S. 73
[510] Zitate aus Ministerium 1994: S. 74
[511] Ministerium 1994: S. 120
[512] vgl. Ministerium 1994: S. 120
[513] vgl. Wußing 1989: S. 123
[514] vgl. Ministerium 1994: S. 121
[515] vgl. Ministerium 1994: S. 177ff

der industriellen Revolution und dem Übergang zum Informationszeitalter die gesellschaftlichen Bedingungen und damit auch die Probleme, mit denen die Menschen konfrontiert waren, völlig verändert haben. Die mathematischen Probleme der Renaissance begegnen uns zwar noch ab und zu, aber nicht in einem Maße, das eine so starke Konzentration des anwendungsorientierten Teils des Lehrplanes auf sie rechtfertigen würde. Statt dessen sind neue, auch der Mathematik zugängliche Probleme in den Vordergrund gerückt, die vor allem mit der Computertechnik, mit der Analyse komplexer Systeme und der Aufbereitung und Interpretation von Informationen zusammenhängen. Kaum ein Tag, an dem man beim Aufschlagen der Zeitung keine Statistiken und Schaubilder vorfindet; kaum ein Beruf, in dem man nicht hin und wieder mit konkretem und hypothetischen Zahlenmaterial konfrontiert wird, daß man zueinander in Beziehung setzten und auf Grund dessen man Entscheidungen treffen muß. Die mathematischen Grundlagen für diese Probleme der modernen Gesellschaft werden im Lehrplan nur wenig berücksichtigt. Zwar ist in Zusammenhang mit den direkt aufs Sachrechnen bezogenen Lehrplaneinheiten jeweils die Behandlung von Tabellen und Schaubildern vorgesehen, in diesen Lehrplaneinheiten geht es aber nur um Zweisatz, Dreisatz, Prozent- und Zinsrechnen. Grundlagen der Statistik und Stochastik, die zu einem wirklichen Verständnis der heute üblichen Aufbereitungsformen von Zahlenmaterialien vielfach nötig sind, finden sich im Lehrplan nicht.[516]

Zusätzlich zu den Problemen, die sich aus den oben dargestellten Differenzen zwischen Bildungs- und Lehrplan ergeben, kommen im Bereich der anwendungsorientierten Mathematik also noch folgende:

- Die Schüler müssen sich im Unterricht mit Formen anwendungsorientierter Mathematik auseinandersetzen, die sich an den Problemen der Renaissance ausrichtet und die ihnen im späteren Alltag nur wenig nutzen werden.
- Die Schüler bekommen nur unzureichende mathematische Grundlagen für die Probleme vermittelt, die die heutige Gesellschaft an sie stellt.

Versucht man angesichts dieser Situation, den Schülern gegenüber die anwendungsorientierten Inhalte des Lehrplans dennoch mit ihrer Nützlichkeit im täglichen Leben zu begründen, so ist es nicht verwunderlich, wenn es zu Motivationsproblemen und folglich auch zu schwachen oder mittelmäßigen Leistungen kommt, wie sie in der TIMSS nachgewiesen wurden.

[516] vgl. Ministerium 1994: S. 73f

3.3 Zukunft

In der Einleitung meiner Arbeit habe ich gezeigt, daß in Entscheidungen, die die Gestaltung von Unterricht betreffen Wissen über den Unterrichtsgegenstand, die Schüler mit ihren Bedürfnissen und den unterrichtlichen Kontext einfließen muß. Ausgehend von diesen drei Bereichen möchte ich im folgenden Vorschläge zu einer Verbesserung des Mathematikunterrichts machen, um den es, wie ich im vorigen Abschnitt gezeigt habe, nicht zum besten steht.

3.3.1 Folgerungen aus der Untersuchung des Unterrichtsgegenstands

Fragt man, was der Mathematikunterricht außer der Vorbereitung auf die Bewältigung der Probleme des täglichen Lebens noch leisten soll, so wird häufig die Erhaltung des kulturellen Wissens in Bezug auf die Mathematik genannt.[517] Dieser Punkt ist vor allem in demokratischen Gesellschaften sehr wichtig, in denen auch die Weiterentwicklung der Wissenschaften, insbesondere der Mathematik, gesellschaftlichen Steuerungsmechanismen unterliegen sollte.[518] Damit die Schüler als Mitglieder des demokratischen Gemeinwesens die dafür notwendige Kompetenz erlangen können, ist es notwendig, daß ihnen im Mathematikunterricht ein unverzerrtes und möglichst umfassendes Bild der Mathematik vermittelt wird.

Bei meiner Untersuchung der Mathematik als Unterrichtsgegenstand, der ich einen großen Teil dieser Arbeit gewidmet habe, erschienen mir folgende Punkte als besonders wichtig:

- Über das Wesen der Mathematik besteht keine Einigkeit. Die meisten philosophischen Ansätze, die sich der Frage nach dem Wesen der Mathematik widmen, sind entweder einseitig, wie z.B. Platonismus und Empirismus, oder sehr komplex, wie der konstruktivistische Ansatz. Diese Uneinigkeit über das Wesen der Mathematik hindert aber die Mathematiker nicht daran, diese Wissenschaft seit Jahrtausenden sehr effektiv zu betreiben.
- Die Mathematik ist ein geschichtliches Phänomen. Mathematik war nicht immer das, was sie heute ist und hat sich auch nicht unabhängig von äußeren Einflüssen, sondern in ständiger Wechselwirkung mit den jeweils herrschenden gesellschaftlichen Bedingungen entwickelt.
- Von Anfang an gab es in der Mathematik anwendungsorientierte Aspekte und auf Erkenntnis ausgerichtete Aspekte „reiner“ Mathematik. Sie haben sich im Laufe der Geschichte immer wieder gegenseitig befruchtet und haben beide als Teile des Gesamtunternehmens Wissenschaft ihre Bedeutung.

---

[517] vgl. z.B. Heymann 1996: S. 154 und Strehl 1979: S. 18

[518] vgl. den Abschnitt „2.2.2.3 Sicherung und Weiterentwicklung der Mathematik“ meiner Arbeit

Für die Gestaltung des Mathematikunterrichts bedeutet dies konkret:

- Das Eingehen auf die Frage nach dem Wesen der Mathematik ist für die Realschule vermutlich zu komplex, hier sollte man jedoch im Hinblick auf ein umfassendes Bild der Mathematik darauf achten, daß kein einseitiger philosophischer Ansatz den Unterricht beherrscht, wie es zum Beispiel im Fall der neuen Mathematik geschehen ist.[519]
- Ohne die „reine" Mathematik hätte die anwendungsorientierte Mathematik nicht zu dem werden können, was sie heute ist und umgekehrt. Im Unterricht sollte diese Abhängigkeit durch eine entsprechende Verknüpfung der Unterrichtseinheiten deutlich werden.
- Auch wenn „reine" und anwendungsorientierte Mathematik im Unterricht miteinander verknüpft werden, sollten die unterschiedlichen Ansätze deutlich werden. Inhalte aus dem Bereich der „reinen" Mathematik sollten mit den Argumenten der „reinen" Mathematiker motiviert werden. Dabei sollte auf die Flexibilität mathematischer Strukturen, bei der Lösung ganz verschiedener, zum Teil noch überhaupt nicht vorhandener Probleme eingegangen werden. So weit dies dem Lehrer möglich ist, sollte er auch versuchen, den Schülern zu vermitteln, daß die Beschäftigung mit m a-thematischen Problemen, unabhängig von ihrem außermathematischen Nutzen, Freude und ästhetischen Genuß bereiten kann. Inhalte aus dem Bereich der anwendungsorientierten Mathematik sollten mit den Argumenten anwendungsorientierter Mathematiker motiviert werden. Das heißt, daß hier vor allem auf den praktischen Nutzen der Mathematik eingegangen werden sollte. Es sollte aber nur dann ein konkreter Nutzen für die Schüler dargestellt werden, wenn dieser in der heutigen Gesellschaft auch tatsächlich besteht.
- Ansonsten sollte die Geschichtlichkeit sowohl der angewandten als auch der „reinen" Mathematik betont werden und immer wieder auf den Kontext hingewiesen werden, in dem die jeweiligen mathematischen Inhalte sich entwickelten und für die Menschen bedeutsam waren.
- Ist die geschichtliche Bedeutung der Mathematik durch dieses Vorgehen erst einmal verstanden, werden die Schüler auch dem Argument der Sicherung von Kulturwissen als Motivation bestimmter Inhalte des Mathematikunterrichts zugänglich sein.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß ein Mathematikunterricht, der die verschiedenen Aspekte der Mathematik berücksichtigt, den Schülern nicht nur ein besseres Bild des Gesamtphänomens Mathematik vermitteln kann, sondern auch bessere und ehrlichere Möglichkeiten zur Motivation der Schüler bietet als ein Unterricht, der das nicht tut.

[519] Im Gymnasium können in Verbindung mit der Analysis und dem Begriff des Unendlichen durchaus verschiedenen Vorstellungen von Mathematik diskutiert werden.

3.3.2 Folgerungen aus der Untersuchung der Bedürfnisse der Schüler

Obwohl sich mit einer geeigneten Argumentation alle Aspekte des Mathematikunterrichts motivieren lassen, dürfte der wichtigste Aspekt für die Schüler doch die Anwendbarkeit der Mathematik zur Lösung von Problemen ihres jetzigen und späteren Lebens sein.

Damit hier die Bedürfnisse der Schüler wirklich getroffen werden, schlage ich vor, sich nicht auf Mutmaßungen zu verlassen, sondern regelmäßige empirische Untersuchungen durchzuführen, um festzustellen, welche mathematischen Kenntnisse in Alltag und Beruf derzeit tatsächlich gefordert sind. Solche Untersuchungen könnten regelmäßig zum Beispiel vor jeder anstehenden Lehrplanreform durchgeführt und ausgewertet werden. Wie ich im Abschnitt „2.2.2.1 Nutzen der Mathematik für den Einzelnen“ bereits erläutert habe, schlage ich eine Untersuchung folgender Medien und Bereiche vor: Tageszeitungen, Fernsehprogramme, hauptschulspezifische Berufe, realschulspezifische Berufe, verschiedene Studiengänge.

Solche Untersuchungen wären in mehrerer Hinsicht nützlich:

- Der Bedarf an Mathematik in verschiedenen Bereichen unserer Gesellschaft würde ermittelt werden und die anwendungsorientierten Anteile des Unterrichts könnten darauf abgestimmt werden.
- Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen könnte ein Pool von „echten“ Anwendungsaufgaben entstehen, so daß dem Lehrer adäquates Material zur Gestaltung der anwendungsorientierten Anteile des Mathematikunterrichts zur Verfügung steht.
- Der Lehrer könnte aufgrund dieser Untersuchungen die Schüler überzeugender in Hinblick auf den konkreten Nutzen der Mathematik motivieren.

Die anwendungsorientierten Inhalte des Lehrplanes würden auf diese Weise ständig aktualisiert und den herrschenden Erfordernissen angepaßt. Dadurch würden die Lehrplaninhalte, die sich an innermathematischen Problemen orientieren, nicht an Bedeutung verlieren. Eher im Gegenteil: im Kontrast zu den nun nachweislich auf die Lösung außermathematischer Probleme ausgerichteten Inhalten würde der Charakter und die Besonderheiten dieser an der „reinen“ Mathematik ausgerichteten Inhalte erst richtig deutlich werden - denn nach wie vor wäre es die Aufgabe des Mathematikunterrichts, ein möglichst umfassendes Bild der Mathematik zu vermitteln, so wie ich es im vorangehenden Abschnitt erläutert habe.

3.3.3 Folgerungen aus der Untersuchung des unterrichtlichen Kontextes

Vergleicht man die didaktischen Konzepte des „traditionellen“ Sachrechnens, der „neuen“ Mathematik und eines ausgewogenen Mathematikunterrichts miteinander, so ist nicht nur wegen seines theoretischen Hintergrundes, sondern auch auf Grund des faktischen Scheiterns der beiden anderen Konzepte, das des ausgewogenen Mathematikunterrichts am erfolgsversprechendsten.

Im aktuellen Bildungsplan findet sich die relativ konsequente Darstellung eines ausgewogenen Mathematikunterrichts. Inhalte aus dem Bereich der anwendungsorientierten und der „reinen“ Mathematik sollen nicht nur nebeneinander gestellt, sondern wirklich miteinander verbunden werden. Aber erst wenn diese im Bildungsplan entworfene Konzeption auch wirklich in den Lehrplänen umgesetzt wird, kann ein ausgewogener Mathematikunterricht an den Schulen verwirklicht werden.

Ein ausgewogener Mathematikunterricht, in dem die Bereiche anwendungsorientierter und „reiner“ Mathematik wirklich miteinander verknüpft werden, kann aber nur ein erster Schritt sein. Will man den Schülern wirklich ein umfassendes Bild der Mathematik und ihrer gesellschaftlichen Bedeutung vermitteln, so ist es notwendig, die Bereiche der anwendungsorientierten und der „reinen“ Mathematik auch entsprechend zu motivieren und den Schülern immer wieder die Geschichtlichkeit der Mathematik vor Augen zu führen. Schließlich ist es notwendig, die anwendungsorientierten Anteile des Mathematikunterrichts an den tatsächlichen Bedürfnissen der Schüler auszurichten.

3.3.4 Schluß

Ich bin in meiner Arbeit nur auf einen kleinen Teil der Möglichkeiten zur Verbesserung des Mathematikunterrichts und insbesondere seiner anwendungsorientierten Bereiche eingegangen: Auf *die* Verbesserungen, die sich aus meiner Erörterung der mathematischen, philosophischen und geschichtlichen Grundlagen des Mathematikunterrichts ableiten ließen. Verbesserungsmöglichkeiten, die auf einer strukturellen Veränderung der Schule oder auf einer veränderten gesellschaftlichen Einstellung zur Bedeutung des Lernens beruhen, habe ich dabei ebenso ausgeklammert wie methodische Aspekte des Mathematikunterrichts. Besonders zur Methodik des Sachrechnens gibt es viel Literatur, auf die ich den Leser an dieser Stelle hinweisen will: z.B. Humenberger / Reichel 1994, Glatfeld 1983, Strehl 1979 und Winter 1992. Darüber hinaus empfehle ich jedoch auch, die auf dem Konstruktivismus beruhenden methodologischen Ansätze im Auge zu behalten, die sich momentan größtenteils noch in der Entwicklung und Erprobung befinden.

Aber selbst die Vorschläge zur Verbesserung des Mathematikunterrichts, die ich in meiner Arbeit mache, deute ich mehr an, als sie wirklich auszuführen. Der Grund dafür ist, daß es eines meiner Hauptanliegen beim Verfassen dieser Arbeit war, mich mit den Grundlagen des Mathematikunterrichts auseinanderzusetzen. Um meine Vorgehensweise zu verdeutlichen, möchte ich abschließend den Inhalt meiner Arbeit nochmal kurz zusammenfassen.

Im ersten Kapitel verfolgte ich das Verhältnis des Anwendungs- und des Erkenntnisaspektes der Mathematik von der Vorgeschichte bis in die Gegenwart. Dabei stellte ich fest, daß sich Anwendung und Erkenntnisstreben im Laufe der Geschichte immer wieder gegenseitig befruchteten und daß die Differenzen zwischen „reinen“ und anwendungsorientierten Mathematikern größtenteils ideologischer Natur waren. Außerdem versuchte ich die Frage nach dem Wesen der Mathematik zu klären, die mir bei meiner Reise durch die Mathematikgeschichte immer wieder begegnete. Das gelang mir jedoch zunächst nicht und ich konnte lediglich eine Übersicht über die gängigen philosophisch-mathematischen Sichtweisen geben.

Im zweiten Kapitel beschäftigte ich mich näher mit dem Wirklichkeitsbegriff, den ich im ersten Kapitel relativ undifferenziert verwendet hatte. Die verschiedenen ontologischen Wirklichkeitskonzeptionen stellten sich dabei als relativ unbefriedigend heraus, da sie nicht ohne metaphysische Elemente auskommen. Ich wandte mich deswegen einem epistemologischen Ansatz zu, der sich nicht mit der Beschaffenheit der Wirklichkeit selbst, sondern mit unserem Wissen von der Wirklichkeit beschäftigt. In diesem Zusammenhang skizzierte ich den „radikalen“ Konstruktivismus, aus dem sich eine konsistente Theorie über das Wesen der Mathematik ableiten ließ, die sowohl den Anwendungs- als auch den Erkenntnisaspekt berücksichtigte. Darüber hinaus sprach ich im zweiten Kapitel noch die Frage nach der Bedeutung der Mathematik für die Lebenswirklichkeit des Menschen an und diskutierte kurz den Nutzen der Mathematik für den einzelnen, die Gesellschaft und den Erhalt der Wissenschaft Mathematik selbst.

Im dritten Kapitel widmete ich mich Fragen, die mit der Weitergabe von Mathematik zusammenhingen. Zunächst untersuchte ich verschiedene didaktische Ansätze, die den Mathematikunterricht an deutschen Schulen in diesem Jahrhundert prägten. Dabei ließ sich verfolgen, wie die Kritik an den extremen didaktischen Ansätzen des „traditionellen“ Sachrechnens und der „neuen“ Mathematik zum Konzept eines ausgewogenen Mathematikunterrichts führte. Die jüngst veröffentlichte TIMSS-Studie gab mir jedoch Hinweise darauf, daß auch mit diesem Konzept noch einiges im Argen lag. Mit einer Analyse des aktuellen Bildungs- und Lehrplanes für die Realschulen in Baden-Württemberg versuchte ich, den Ursachen dieser Probleme auf den Grund zu kommen. Abschließend zeigte ich auf, welche Verbesserungsvorschläge für den Mathematikunterricht sich ergeben, wenn man die Informationen aus den verschiedenen Gebieten, mit denen ich mich in meiner Arbeit beschäftigt habe, zusammenführt.

„Mathematik und Wirklichkeit. Von den Wurzeln der Mathematik zu einer Didaktik des Sachrechnens.“ Der Titel dieser Arbeit gab ein Thema vor, das einen weiten Bogen spannte. Ausgehend von der Frage, wie sich der Mathematikunterricht so gestalten läßt, daß daraus der größtmögliche Nutzen für die Schüler entsteht, führte mich dieser Bogen durch Bereiche der Mathematik, Geschichte, Soziologie, Philosophie und Didaktik um schließlich bei Verbesserungsvorschlägen für die Gestaltung des Mathematikunterrichts wieder zu enden. Ich hoffe, daß ich dabei dem Leser etwas von der Fas zination vermitteln konnte, die das Thema auf mich ausübte und daß es ihm wie mir geht, der ich nach dem Schreiben nicht weniger Fragen habe als zuvor - nur andere.

„Blickt man auf die Dinge, sind keine Dinge da, man sieht auf den Geist;
blickt man auf den Geist, ist kein Geist da: er ist seinem Wesen nach leer;
blickt man auf beides, löst sich das Festhalten an Dualität in sich selbst auf." [520]

Karmapa Rangjung Dorje

Nachwort

In der ersten Fassung einer Einleitung, die mir zugleich als Richtschnur bei der Abfassung meiner Arbeit dienen sollte, schrieb ich stolz:

„Der erste Teil der Arbeit wird sich mit dem Sammeln von Informationen befassen. Dabei will ich mich zunächst der Frage zuwenden, was Mathematik eigentlich ist. [...]

Als nächstes will ich untersuchen, mit welchen besonderen Problemen und Schwierigkeiten sich die Schüler von heute konfrontiert sehen - welche Fähigkeiten sie benötigen, um in der heutigen Gesellschaft zu bestehen und welche Fähigkeiten die Gesellschaft den Schülern abverlangen muß, um ihre eigene Existenz zu sichern.

Schließlich will ich untersuchen, wie Mathematik bislang in der Schule unterrichtet wurde und in welchem Verhältnis der Mathematikunterricht zum Unterricht in den anderen Schulfächern steht.

Ausgehend von diesen Informationen will ich dann im zweiten Teil meiner Arbeit erörtern, mit welchen Zielen der Sachrechenunterricht in der Schule verfolgt werden sollte. Hierbei werde ich einige gängige Positionen untersuchen, um schließlich meine eigenen Zielvorstellungen zu präsentieren.

Im dritten Teil meiner Arbeit schließlich nehme ich mich der Frage an, wie diese Ziele umgesetzt werden können. Dazu möchte ich analysieren, was beim Lösen einer Sachaufgabe eigentlich geschieht und davon ausgehend die verschiedenen Möglichkeiten, Sachaufgaben zu behandeln, vorstellen. Danach will ich einige Unterrichtskonzepte vorstellen, die momentan in der didaktischen Diskussion hoch im Kurs stehen und schließlich mit eigenen Empfehlungen enden."

Das Arbeitspensum, das ich mir damit vorgegeben hatte, stellte sich jedoch bald als unrealistisch heraus. Deswegen schränkte ich meine Planung nach und nach immer mehr ein. Zunächst auf den ursprünglich geplanten ersten Teil - schließlich auf die ursprünglich geplanten ersten beiden Kapitel mit einigen Ergänzungen. Der Schwerpunkt der Arbeit, der zunächst im didaktischen Bereich gedacht war, verlagerte sich so immer mehr in den Bereich der philosophischen Grundlagen. Dennoch denke ich, daß es mir gelungen ist, einen Großteil der Dinge, die mir besonders am Herzen lagen und die

[520] Karmapa 1995: S. 17f

eigentlich in den gestrichenen Teilen gestanden hätten, sozusagen durch die Hintertür doch noch in die gekürzte Fassung der Arbeit einfließen zu lassen.

Rückblickend bin ich sehr froh darüber, diese Arbeit geschrieben zu haben. Ich bin deswegen froh darüber, weil ich viel dabei gelernt habe. Das ist das Beste, was man sich vom Verfassen einer Arbeit erhoffen kann, die nicht entscheidend zur Endnote beiträgt, nicht zur Verleihung von Doktor oder sonstigen Würden führt, keine zahlreiche Leserschaft haben und einen auch ansonsten weder reich noch berühmt machen wird. Ich habe viel über die Inhalte des Faches Mathematik gelernt, viel über seine Geschichte und seine Philosophie, weit mehr als in dieser Arbeit zu lesen ist - und darüber bin ich froh. Wichtiger ist mir jedoch das, was ich über die Bedeutung der Mathematik für den einzelnen Menschen und für die Gesellschaft gelernt habe; die Art und Weise, in der ich Mathematik unterrichten werde (wenn man mich läßt), wird dadurch sicherlich beeinflußt werden. Das Wichtigste allerdings - die wirklich entscheidenden Dinge - habe ich über mich selbst gelernt.

Meinen betreuenden Professoren, Dr. rer. nat. Bernd Hafenbrak und Dr. habil. Siegfried Zellmer, danke ich dafür, daß sie mir bei Bedarf beratend zur Seite standen und mir ansonsten bei der Ausarbeitung des Themas freie Hand ließen, so daß ich das lernen konnte, was ich lernen wollte.

Danken möchte ich auch all denjenigen, die mir beim Korrekturlesen der Arbeit geholfen haben und mich durch ihre inhaltlichen und „formalen“ Anregungen unterstützt haben.

Gewidmet ist diese Arbeit allen, die die Launen geduldig ertrugen, die ich während ihrer Abfassung an den Tag legte.

Weingarten, August 1998

Jörg Dieter

Anhang I: Literaturverzeichnis

Athen, Hermann und Bruhn, Jörn (Hg.): Rechnen und Mathematik. München; Gütersloh; Wien: Bertelsmann 1974.

Barrow, John D.: Warum die Welt mathematisch ist. Frankfurt a. M.; New York: Campus 1993.

Beck, Uwe: Zur Didaktik der Anwendung innerhalb eines ausgewogenen Mathematikunterrichts. Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Erziehungswissenschaften an der Pädagogischen Hochschule Ruhr in Dortmund. Dortmund: 1979.

Bierce, Ambrose: Des Teufels Wörterbuch. Neu übersetzt von Gisbert Haefs. München: Goldmann 1996.

Bourbaki, Nicolas: Die Architektur der Mathematik. In: Otte, Michael (Hg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin; Heidelberg; New York: Springer 1974. S. 140-159. (Dort übernommen aus: Physikalische Blätter, Jg. 17, 1961, S. 161-166 und S. 212-218. Weinheim: Physik Verlag.)

Brieskorn, Egbert: Über die Dialektik in der Mathematik. In: Otte, Michael (Hg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin; Heidelberg; New York: Springer 1974. S. 221-286.

Coers, Helmut: Mathematisches Existenzproblem und Axiomatik. In: Der Mathematikunterricht. 12. Jg. 1966, Nr. 3, S. 40-60.

Crescenzo, Luciano De: Geschichte der griechischen Philosophie. Von Sokrates bis Plotin. Zürich: Diogenes 1990.

Dilk, Anja: Zufällig die Brille vergessen. Zwischen 500.000 und vier Millionen Menschen haben keine ausreichenden Schreib- und Lesekenntnisse. In: TAZ-Berlin, 26.11.94, S. 33.

Eckhardt, Heinz (Hg.): Neue Mathematik in den Klassen 5 bis 7. 3. Auflage. Frankfurt a. M.; Berlin; München: Diesterweg 1972.

Ernest, Paul: The philosophy of mathematics education. London; New York; Philadelphia: Falmer 1991.

Feynman, Richard P.: Sie belieben wohl zu scherzen Mr. Feynmann! Abenteuer eines neugierigen Physikers. Neuausgabe. München: Piper 1991.

Fischer, Roland: Mittel und System: Zur sozialen Relevanz der Mathematik. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 1988, Nr. 1, S. 20-28.

Fleck, Ludwig: Zur Krise der Wirklichkeit. In: Die Naturwissenschaften. 1929, Nr. 17, S. 425-430.

Frazer, James Georg: Der goldene Zweig. Eine Studie über Magie und Religion. Köln; Berlin: Kiepenheuer & Witsch 1968. (Die erste Auflage der englischen Ausgabe unter dem Titel „The golden bough“ wurde 1890 veröffentlicht.)

Führer, Lutz: Anwendungsorientierung der Mathematik aus geschichtlicher Sicht. In: Mathematik lehren. 1986, Nr. 19, S. 42-48.

Gaebert, Hans W.: Der große Augenblick in der Physik. Von den frühen physikalischen Versuchen bis zur Kernphysik. Bayreuth: Loewes 1974.

Gerstenmaier, Jochen und Mandel, Heinz: Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. In: Zeitschrift für Pädagogik. 41. Jg. 1995, Nr. 6, S. 867-887.

Glasersfeld, Ernst v.: Einführung in den radikalen Konstruktivismus. In: Watzlawick, Paul (Hg.): Die erfundene Wirlichkeit. Wie wissen wir, was wir zu wissen glauben? Beiträge zum Konstruktivismus. München; Zürich: Piper 1985. S. 16-38

Glasersfeld, Ernst v.: Radikaler Konstruktivismus. Ideen, Ergebnisse, Probleme. Frankfurt a. M.: Suhrkamp 1997.

Glatfeld, Martin (Hg.): Anwendungsprobleme im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg 1983.

Goethe, Johann Wolfgang: Faust. Der Tragödie erster Teil. Stuttgart: Reclam 1967.

Hayward, Jeremy W.: Methodik und Validierungsverfahren der Wissenschaft. In: Jeremy W. Hayward und Francisco J. Varela (Hg.): Gewagte Gedankenwege. Wissenschaftler im Gespräch mit dem Dalai Lama. München; Zürich: Piper 1996. S. 21 - 44.

Heymann, Hans Werner: Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim; Basel: Beltz 1996.

Hilton, Peter: Die Ausbildung von Mathematikern heute. In: Otte, Michael (Hg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin; Heidelberg; New York: Springer 1974. S. 427-449.

Humenberger, Johann und Reichel, Christian: Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich: Wissenschaftsverlag 1995.

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt a. M.; New York: Campus 1986.

Jansen, Torsten; Küpperbusch, Martin; Lordick, Horst: Wissen Mathematik. Bergisch Gladbach: Lingen 1995.

Kaczynski, Theodore: Industrial society and its future. (Dieser Text wurde 1996 zuerst veröffentlicht und ist auch bekannt unter dem Titel: The Unabomber's Manifesto). Abrufbar unter: http://www.df.lth.se/micke/wholemanifesto.html - am: 29.7.1998.

Karmapa Rangjung Dorje: Von der Klarheit des Geistes. Drei buddhistische Texte von Karmapa Rangjung Dorje. Aus dem Tibetischen übersetzt und hg. von Alex und Tina Draszczyk. Wien: Marpa 1995.

King, Alexander und Schneider, Bertrand: Die erste Globale Revolution. Bericht zur Lage der Welt. Hg. vom Club of Rome. München: Goldmann 1993. (Englische Originalausabe 1991)

König, Gerhard: Wieviel Mathematik gehört zur Allgemeinbildung? Einleitende Bemerkungen zu fünf Rezensionen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 1997, Nr.2, S. 36-37.

Kotzmann, Ernst: Mathematik und Gesellschaft - eine historische Skizze. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 1988, Nr.1, S. 5-10.

Kraus, Josef: Bildungspolitische Schlußfolgerungen aus der TIMSS-Studie Deutschland - 15 Thesen. Schriftliche Fassung eines Vortrages. Gehalten vor der Bundesvereinigung der Deutschen Arbeitgeberverbände im Institut der deutschen Wirtschaft in Köln am 28.5.1997.

Kropp, Gerhard: Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten. Wiesbaden: Aula 1994

Laugwitz, Detlef: Sinn und Grenzen der axiomatischen Methode. In: Der Mathematikunterricht. Jg. 12. 1966, Nr. 3, S. 16-39.

Maturana, Humberto R. und Varela, Francisco J.: Der Baum der Erkenntnis. Die biologischen Wurzeln des menschlichen Erkennens. München: Goldmann 1987.

Meixner, Johanna: Konstruktivismus und die Vermittlung produktiven Wissens. Neuwied; Kriftel/Ts.; Berlin: Luchterland 1997.

Meschkowski, Herbert (Hg.): Mathematik-Duden für Lehrer. Stoff - Didaktik. Mannheim; Zürich: Dudenverlag 1969.

Meschkowski, Herbert: Denkweisen großer Mathematiker: ein Weg zur Geschichte der Mathematik. - Stark erweiterte und überarbeitete Ausgabe - Braunschweig: Vieweg 1990.

Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg (Hg.): Bildungsplan für die Realschule. Lehrplanheft 3 / 1994. Stuttgart: Neckar 1994.

Neumann, John von: Der Mathematiker. In: Otte, Michael (Hg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin; Heidelberg; New York: Springer 1974. S. 29 - 46. Zuerst in: The works of the mind. Ed. by. R.B. Heywood. Chicago: University of Chicago Press 1947. S. 180 - 197.

Ossner, Jakob: Praktische Wissenschaft. In: Bremerich-Vos, Albert (Hg.): Handlungsfeld Deutschunterricht im Kontext. Festschrift für Hubert Ivo. Frankfurt a.M.: Diesterweg 1993. S. 186-199.

Otte, Michael (Hg.): Mathematiker über die Mathematik. Berlin; Heidelberg; New York: Springer 1974.

Radatz, Hendrik: Der Mathematikunterricht in der Zeit des Nationalsozialismus. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 1984, Nr. 6, S. 199-206.

Ruben, Peter: Philosophie und Mathematik. Eine populärwissenschaftliche Darstellung der philosophischen Basis für das weltanschauliche Begreifen der Mathematik. Leipzig: Teubner 1979.

Sacramento Bee: Events in Kaczynski’s life. Abrufbar unter http://www.unabombertrial.com/archive/1998/012298.06.html - am: 29.8.1998.

Sagan, Carl: Unser Kosmos. Eine Reise durch das Weltall. München: Knauer 1989.

Schischkoff, Georgi (Hg.): Philosophisches Wörterbuch. Sechzehnte Auflage. Stuttgart: Kröner 1961.

Schwegler, Helmut: Wissenschaftsphilosophische Probleme der Physik. Überarbeiteter Vortrag, gehalten am 21. November 1994 im Colloquium des Zentrum Philosophische Grundlagen der Wissenschaften. Universität Bremen: Zentrum Philosophische Grundlagen der Wissenschaften 1995.

Strehl, Reinhard: Grundprobleme des Sachrechnens. Freiburg; Basel; Wien: Herder 1979.

Thiel, Christian: Philosophie und Mathematik: eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1995.

Volk, Dieter: Handlungsorientierte Unterrichtslehre am Beispiel Mathematikunterricht. Bd. B. - Zur Wissenschaftstheorie der Mathematik. Bensheim: päd. extra Buchverlag 1980.

Wagenschein, Martin: Verstehen lehren. 5., erweiterte Auflage. Weinheim; Basel: Beltz 1975.

Weischedel, Wilhelm: Die philosophische Hintertreppe. 34 große Philosophen in Alltag und Denken. 11. Auflage. München: dtv 1984.

Willer, Jörg: Physik und menschliche Bildung. Eine Geschichte der Physik und ihres Unterrichts. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1990.

Windmann, Bernd: Methoden des Geschichtsunterrichts im Mathematikunterricht. Plädoyer für ein Unterrichtskonzept. In: Mathematik lehren. 1986, Nr. 19, S. 24-31.

Winter, Heinrich: Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechnens; Funktion des Sachrechnens; Unterrichtsprojekte. 3. Auflage. Frankfurt a. M.: Cornelsen 1994.

Wußing, Hans u.a.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Zweite, überarbeitete Auflage. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1989.

Wußing, Hans u.a.: Vom Zählstein zum Computer. 1. Überblick und Biographien. Hg. von: Projektgruppe „Geschichte der Mathematik“ (GdM) der Universität Hildesheim: Institut für Mathematik / Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung. Hildesheim: Franzbecker 1997.

Anhang II: Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig gefertigt, die Quellen einer Entlehnung kenntlich gemacht und außer den genannten keine weiteren Hilfsmittel verwendet habe.

Weingarten, den 10.8.1989